# LEÇONS

## SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE

# DES SURFACES

ET LES

## APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR

**GASTON DARBOUX,**

MEMBRE DE L'INSTITUT,
DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

---

**QUATRIÈME PARTIE.**

DÉFORMATION INFINIMENT PETITE
ET REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

**Premier fascicule.**



# THÉORIE GÉNÉRALE
# DES SURFACES.

## QUATRIÈME PARTIE.

## LIVRE VIII.

### DÉFORMATION INFINIMENT PETITE ET REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE.

### CHAPITRE I.

#### DÉFORMATION INFINIMENT PETITE. PREMIÈRE SOLUTION.

Énoncé précis du problème à résoudre. — Comment on pourrait entreprendre son étude par la méthode des séries. — Le problème de la déformation infiniment petite consiste dans la détermination des premiers termes de ces séries. — Ce que l'on appelle la *directrice* et le *module* de la déformation infiniment petite. — Couples de surfaces applicables l'une sur l'autre — Rapports de la question proposée avec le problème dit des *éléments rectangulaires*. — Indication des travaux publiés sur ces questions. — Première solution du problème : on est ramené à l'intégration d'une équation linéaire du second ordre. — Interprétation géométrique. — Application au paraboloïde. — Raisonnement *a priori* montrant que la solution du problème peut être obtenue pour toute surface du second degré. — Développement de la solution pour le cas de la sphère. — Démonstration géométrique : la surface $(S_1)$ qui correspond à une sphère par orthogonalité des éléments est la *surface moyenne* d'une congruence isotrope. — Équations qui déterminent cette surface moyenne. — Retour au cas général : les caractéristiques de l'équation linéaire dont dépend la solution sont les lignes asymptotiques de la surface proposée.

852. Il ressort avec évidence des développements contenus dans les Chapitres précédents que, jusqu'ici, le problème de la déformation des surfaces n'a pu être résolu d'une manière complète que dans un petit nombre de cas. Pour faire connaître tout ce qu'il y a d'essentiel dans les travaux des géomètres sur ce beau et difficile sujet, il nous reste à exposer toute une série de

recherches relatives à la déformation infiniment petite, recherches qui conduisent, soit dans la théorie des surfaces, soit dans celle des congruences, à des propositions du plus haut intérêt. Formulons d'abord d'une manière précise l'énoncé du problème qui va nous occuper dans ce Chapitre et dans les suivants.

Imaginons que l'on détache de l'ensemble des surfaces qui résultent de la déformation d'une surface donnée (S) une famille de surfaces dont (S) fera partie, c'est-à-dire une suite continue de surfaces, représentée en coordonnées rectangulaires par une équation de cette forme

$$\varphi(X, Y, Z, t) = 0,$$

où $t$ désigne un paramètre variable et telle que la surface proposée corresponde, par exemple, à la valeur zéro de ce paramètre. Si $x, y, z$ désignent les coordonnées d'un point quelconque de (S) et si X, Y, Z sont les coordonnées du point correspondant de la surface de paramètre $t$, on devra avoir

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1}$$

On peut d'ailleurs supposer que X, Y, Z, fonctions de la variable $t$ en même temps que de $x, y, z$, soient développables suivant les puissances de $t$. Et comme X, Y, Z doivent se réduire respectivement à $x, y, z$ pour $t = 0$, on devra avoir

$$\left\{\begin{aligned} X &= x + tx_1 + t^2x_2 + \ldots, \\ Y &= y + ty_1 + t^2y_2 + \ldots, \\ Z &= z + tz_1 + t^2z_2 + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, \ldots$ désignant des fonctions indépendantes de $t$, mais dépendantes des deux paramètres, quels qu'ils soient, que l'on a choisis pour fixer la position du point $(x, y, z)$ sur la surface (S). Substituons les valeurs de X, Y, Z dans l'équation (1) et égalons à zéro les coefficients des différentes puissances de $t$. Nous obtenons ainsi les relations

$$\left\{\begin{aligned} &dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0, \\ &dx\,dx_2 + dy\,dy_2 + dz\,dz_2 + \frac{1}{2}(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2) = 0, \\ &dx\,dx_3 + dy\,dy_3 + dz\,dz_3 + dx_1\,dx_2 + dy_1\,dy_2 + dz_1\,dz_2 = 0. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &dx\,dx_n + dy\,dy_n + dz\,dz_n + dx_1\,dx_{n-1} + dy_1\,dy_{n-1} + dz_1\,dz_{n-1} + \ldots = 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

qui permettront de déterminer de proche en proche les fonctions inconnues $x_i$, $y_i$, $z_i$. Si, par exemple, on pouvait intégrer de la manière la plus générale le système (3) en obtenant pour les valeurs de X, Y, Z des séries convergentes, il est clair que l'on aurait résolu d'une manière complète par la méthode des séries le problème de la déformation finie de la surface (S).

Envisagé de cette manière, le problème exige en premier lieu la détermination des fonctions $x_1$, $y_1$, $z_1$ qui satisfont à la première des équations (3)

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0. \tag{4}$$

C'est l'intégration complète de cette équation aux différentielles totales qui donne la solution de ce que nous appellerons dans la suite le *problème de la déformation infiniment petite de la surface* (S).

Supposons que l'on ait trouvé des fonctions $x_1$, $y_1$, $z_1$ vérifiant les trois équations aux dérivées partielles qui sont comprises dans l'équation (4) et considérons la surface (S′) définie par les équations

$$X' = x + tx_1, \qquad Y' = y + ty_1, \qquad Z' = z + tz_1. \tag{5}$$

On aura, en tenant compte de l'équation (4),

$$dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + t^2(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2),$$

de sorte que, si le paramètre $t$ est infiniment petit, la surface (S′) correspond point par point à (S), de telle manière que les longueurs de deux courbes correspondantes diffèrent seulement de quantités infiniment petites du second ordre par rapport à $t$. Si l'on veut donner une forme entièrement géométrique à cet énoncé, on peut dire que la surface (S′) est infiniment voisine de (S) et que la différence des longueurs de deux courbes correspondantes tracées sur les deux surfaces est du second ordre par rapport à la distance qui sépare deux points correspondants quelconques sur (S) et sur (S′).

En comparant les formules (5) aux formules (2), on peut encore admettre que, $x_1$, $y_1$, $z_1$ une fois connus, on pourra toujours, et d'une infinité de manières, déterminer les fonctions $x_2$, $y_2$, $z_2$; $x_3$, ... qui entrent dans les puissances supérieures de $t$; de telle

sorte que la surface (S′) sera infiniment voisine du second ordre d'une infinité de surfaces effectivement applicables sur (S). D'une manière plus précise, si M′ est le point de (S′) qui correspond à un point M de (S), la différence géométrique entre le vecteur MM′ dont les projections sont

$$X'-x, \quad Y'-y, \quad Z'-z,$$

et le vecteur MM″ qui réunirait le point M au point correspondant M″ d'une surface rigoureusement applicable sur (S) et convenablement choisie, sera une grandeur géométrique infiniment petite du second ordre par rapport au segment MM″, au moins dans toute l'étendue d'un segment fini de la surface (S) ([1]).

Si, par les différents points de (S), nous menons les vecteurs MM′, ces vecteurs indéfiniment prolongés engendreront une congruence de droites que nous appellerons les *directrices* de la déformation infiniment petite. Quant à la grandeur MM′, nous l'appellerons le *module* de la déformation. Il est clair qu'une déformation est déterminée si l'on connaît, pour chaque point de (S), la directrice et le module de la déformation. Comme l'équation (4) ne change pas de forme lorsqu'on y multiplie $x_1$, $y_1$, $z_1$ par une constante, nous pourrons supprimer le facteur $t$ et considérer le module comme une quantité finie

$$\mathfrak{M} = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},$$

en nous souvenant que, si l'on veut obtenir une surface (S′) résultant de la déformation infiniment petite de (S), il faudra porter, à partir de chaque point, sur la directrice de la déformation une longueur $\varepsilon\mathfrak{M}$, $\varepsilon$ désignant une constante infiniment petite quelconque. On voit que le module peut toujours être multiplié par une constante.

853. Si l'on imagine les coordonnées $x$, $y$, $z$ exprimées en

---

([1]) Il est bon de remarquer que cette proposition ne caractérise pas la surface (S′) dans le cas où la surface (S) est plane. Toute surface infiniment voisine d'un plan satisfait ici à la définition de la surface (S′) sans qu'on puisse dire qu'elle résulte de la déformation infiniment petite du plan. Le lecteur se rendra compte aisément de la raison de cette exception.

fonction de deux variables $u$ et $v$, l'équation aux différentielles totales (4) se décomposera dans les trois suivantes :

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y_1}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z_1}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y_1}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z_1}{\partial v}=0.$$

Quant aux autres équations comprises dans le système (3), si l'on cherche à les intégrer successivement, elles se ramènent toutes au type suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y_i}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z_i}{\partial u} &&= A_i,\\
&\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}+\ldots &&= B_i,\\
&\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial v}+\ldots &&= C_i,
\end{aligned}$$

qui ne diffère du précédent que par les termes du second membre $A_i$, $B_i$, $C_i$, ces termes étant chaque fois des fonctions connues de $u$ et de $v$. Or, il résulte d'une proposition de Cauchy que *l'on sait toujours intégrer par des quadratures un système quelconque d'équations linéaires aux dérivées partielles avec second membre toutes les fois que l'on sait intégrer d'une manière générale le même système où les seconds membres ont été supprimés*. En utilisant ce résultat dans la question qui nous occupe, on peut donc énoncer la proposition suivante :

*Quand on saura trouver de la manière la plus générale les termes $tx_1$, $ty_1$, $tz_1$ des séries (2), on pourra, par de simples quadratures, déterminer successivement tous les autres.*

En d'autres termes, *quand on saura résoudre d'une manière complète le problème de la déformation infiniment petite, tel que nous l'avons énoncé, on pourra, par de simples quadratures, résoudre le même problème avec une approximation, non plus seulement du second ordre, mais de tel ordre que l'on voudra.*

854. Ces remarques générales une fois présentées, revenons à

l'équation (4) et, pour l'interpréter géométriquement, considérons la surface $(S_1)$ lieu du point dont les coordonnées sont $x_1$, $y_1$, $z_1$. Cette surface correspond point par point à (S) et l'équation (4) exprime évidemment que les éléments linéaires correspondants des deux surfaces sont toujours perpendiculaires. Ainsi le problème de la déformation infiniment petite de (S) équivaut à la détermination des surfaces $(S_1)$ qui correspondent point par point à (S) de telle manière que les éléments linéaires correspondants définis respectivement par les projections $dx, dy, dz$ et $dx_1, dy_1, dz_1$ soient orthogonaux. Nous avons déjà rencontré [I, p. 324, 325] ce mode de correspondance, étudié en premier lieu par M. Moutard [1] et M. Ribaucour [2]. Voici comment ces deux géomètres avaient été conduits à se poser ce problème dit des *éléments rectangulaires*.

Considérons deux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$, applicables l'une sur l'autre. Si nous désignons par X, Y, Z; $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ les coordonnées rectangulaires de deux points correspondants sur ces surfaces, on aura

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2,$$

ce que l'on peut écrire

$$d(X-X_1)\,d(X+X_1) + d(Y-Y_1)\,d(Y+Y_1) + d(Z-Z_1)\,d(Z+Z_1) = 0.$$

Si donc on pose

$$\begin{array}{llcll} X = x + x_1, & X_1 = x - x_1, & & 2x = X + X_1, & 2x_1 = X - X_1, \\ Y = y + y_1, & Y_1 = y - y_1, & \text{ou} & 2y = Y + Y_1, & 2y_1 = Y - Y_1, \\ Z = z + z_1, & Z_1 = z - z_1, & & 2z = Z + Z_1, & 2z_1 = Z - Z_1, \end{array}$$

il viendra

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0.$$

Ainsi, *lorsque deux surfaces* $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ *sont applicables l'une*

---

(1) *Voir* MOUTARD, *Sur la déformation des surfaces* (*Bulletin de la Société Philomathique*, année 1869, p. 45, séance du 12 juin), ainsi que le Mémoire et la Note insérés aux *Comptes rendus*, t. LXX, p. 834 et déjà signalés [II, p. 53].

(2) Les premières recherches de M. Ribaucour, dont la Science déplore la mort récente et prématurée, remontent à peu près à la même époque et sont contenues dans la Note *Sur la théorie de l'application des surfaces l'une sur l'autre* insérée au *Bulletin de la Société Philomathique*, année 1869, p. 37.

*sur l'autre, la surface* (S), *lieu du milieu des segments* $MM_1$ *dont les extrémités sont des points correspondants sur les deux surfaces, et la surface* ($S_1$) *obtenue en menant par un point fixe quelconque de l'espace des droites parallèles et proportionnelles aux segments* $MM_1$ *se correspondront point par point avec orthogonalité des éléments linéaires.* Et, réciproquement, *si deux surfaces* (S), ($S_1$) *se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, et que l'on mène, par chaque point de* (S), *deux droites, égales et de sens contraires, parallèles et proportionnelles au rayon vecteur qui joint un point fixe de l'espace au point correspondant de* ($S_1$), *les extrémités de ces deux vecteurs décrivent deux surfaces* ($\Sigma$), ($\Sigma_1$), *applicables l'une sur l'autre.*

Ainsi il revient au même de chercher un couple de surfaces applicables l'une sur l'autre, ou un couple de surfaces se correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires. Mais il importe de remarquer que, si l'on sait résoudre le problème des éléments rectangulaires pour une surface (S), c'est-à-dire trouver toutes les surfaces qui lui correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, on ne saura pas pour cela déterminer toutes les surfaces applicables sur (S). On pourra seulement connaître des couples de surfaces applicables l'une sur l'autre et contenant des constantes ou des fonctions arbitraires.

855. C'est dans une Communication présentée par l'auteur à la Société mathématique de France, le 17 décembre 1873 [1], qu'a été établi pour la première fois le lien entre le problème des éléments rectangulaires et celui de la déformation infiniment petite que nous avons signalé plus haut. Si l'on emploie les définitions que nous avons adoptées, la proposition qui a servi de point de départ aux recherches de M. Moutard prend la forme suivante :

*Lorsqu'on connaît une déformation infiniment petite de* (S), *si l'on porte à partir de chaque point de* (S) *sur les droites di-*

---

(1) Cette Communication est restée inédite. Voir une Note *Sur les équations aux dérivées partielles* insérée aux *Comptes rendus,* t. XCVI, p. 766; mars 1883.

*rectrices de la déformation deux longueurs égales et de sens contraires, proportionnelles au module de la déformation, on obtient un couple de surfaces applicables l'une sur l'autre.*

Et réciproquement :

*Si deux surfaces* $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ *sont applicables l'une sur l'autre, la droite* $MM_1$ *qui joint deux points correspondants de ces surfaces est à la fois la directrice et le module d'une déformation infiniment petite pour la surface* (S) *lieu du milieu de* $MM_1$.

Depuis ces premières recherches, M. Lecornu (1) et Beltrami (2), dans deux Mémoires importants, publiés en 1880 et 1882, se sont préoccupés de l'étude détaillée des forces que met en jeu la déformation infiniment petite d'une surface donnée, M. Weingarten a repris la question en se plaçant au point de vue de la Géométrie (3). D'importants résultats relatifs au problème des éléments rectangulaires se trouvent aussi dans différents Mémoires de Ribaucour, de MM. Bianchi, Cosserat, Guichard, etc., et seront exposés plus loin.

L'auteur va développer ici les méthodes directes qu'il a suivies dès 1882, dans son enseignement de la Faculté.

**856.** En voici une que nous allons indiquer rapidement.

Soit à résoudre l'équation

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0. \tag{6}$$

On démontrera facilement que l'on peut toujours trouver trois fonctions $a$, $b$, $c$ telles que l'on ait identiquement

$$\left\{\begin{aligned} dx_1 &= c\,dy - b\,dz,\\ dy_1 &= a\,dz - c\,dx,\\ dz_1 &= b\,dx - a\,dy, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

(1) L. Lecornu, *Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLVIII$^e$ Cahier, p. 1-109; 1880).

(2) E. Beltrami, *Sull' equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* (*Memorie delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, serie IV, tomo III, Gennaio 1882).

(3) J. Weingarten, *Ueber die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche* (*Journal de Crelle*, t. C, p. 296; 1886).

au moins tant que la surface (S) lieu du point $(x, y, z)$ ne se réduit pas à une courbe ou à un point [1].

En effet, introduisons six fonctions $a, b, c; a', b', c'$ telles que l'on ait

$$dx_1 = c\,dy - b'\,dz,$$
$$dy_1 = a\,dz - c'\,dx,$$
$$dz_1 = b\,dx - a'\,dy.$$

Si l'on porte ces valeurs de $dx_1$, $dy_1$, $dz_1$ dans l'équation (6), il vient

$$(a - a')\,dy\,dz + (b - b')\,dx\,dz + (c - c')\,dx\,dy = 0.$$

Comme il ne peut exister aucune relation de cette forme en $dx$, $dy$, $dz$, on doit donc avoir

$$a = a', \qquad b = b', \qquad c = c',$$

ce qui donne les formules (7).

De là résulte une première solution du problème des éléments rectangulaires.

En effet, si l'on prend pour $a$, $b$, $c$ des constantes, on peut intégrer les équations (7) et l'on a, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignant de nouvelles constantes,

$$x_1 = \alpha + cy - bz,$$
$$y_1 = \beta + az - cx,$$
$$z_1 = \gamma + bx - ay.$$

On reconnaît ici les expressions des composantes de la vitesse d'un point quelconque dans le mouvement d'un solide invariable. Ainsi cette solution pour laquelle la surface $(S_1)$ lieu du point $(x_1, y_1, z_1)$ serait un plan correspond, non à une déformation, mais à un déplacement infiniment petit de (S); en effet, deux surfaces égales sont évidemment applicables l'une sur l'autre.

---

(1) Si (S) se réduit à une courbe (C), on verra facilement que la surface $(S_1)$ lieu du point $(x_1, y_1, z_1)$ ne peut être qu'une développable $(\Delta)$ dont les plans tangents seront perpendiculaires aux tangentes de (C). Alors, à chaque point $M(x, y, z)$ de (C) correspondent tous les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ de $(\Delta)$ situés sur la génératrice de contact de celui des plans tangents de $\Delta$ qui est perpendiculaire à la tangente en M à la courbe (C).

Si (S) se réduit à un point la surface $(S_1)$ est entièrement indéterminée.

857. Laissant de côté ce cas exceptionnel, revenons aux formules (7) et exprimons les conditions d'intégrabilité. Si nous supposons $z_1$ exprimée en fonction de $x$ et de $y$ et si nous désignons par $p_1$, $q_1$ ses dérivées premières, on aura d'abord

$$(8) \qquad b = p_1, \qquad a = -q_1.$$

Si l'on remplace $dz$ par $p\,dx + q\,dy$, les expressions de $dx_1$, $dy_1$ prennent les formes suivantes

$$(9) \qquad \begin{cases} dx_1 = \quad (c - qp_1)\,dy - pp_1\,dx, \\ dy_1 = - \quad qq_1\,dy \quad - (c + pq_1)\,dx, \end{cases}$$

de sorte que les conditions d'intégrabilité nous donnent

$$(10) \qquad \frac{\partial(c - qp_1)}{\partial x} + \frac{\partial(pp_1)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(qq_1)}{\partial x} - \frac{\partial(c + pq_1)}{\partial y} = 0.$$

Éliminant $c$ par de nouvelles dérivations, on trouve

$$\frac{\partial^2(pp_1)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(qq_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(pq_1 + qp_1) = 0,$$

ou, en développant et désignant par $r_1$, $s_1$, $t_1$ les dérivées secondes de $z_1$,

$$(11) \qquad rt_1 + tr_1 - 2ss_1 = 0.$$

L'intégration de cette équation linéaire fera connaître $z_1$; puis les équations (10), qui donnent les deux dérivées de $c$, et les équations (9) permettront de déterminer $c$, $x_1$, $y_1$ par des quadratures de différentielles totales à deux variables.

858. La principale difficulté est donc l'intégration de l'équation (11). Donnons d'abord l'interprétation géométrique de cette équation.

Si l'on adjoint à la surface (S) la surface auxiliaire ($S_0$) lieu du point ($x$, $y$, $z_1$), les *points correspondants des deux surfaces sont toujours sur une même verticale* et l'équation (11) exprime que *les lignes asymptotiques de l'une des surfaces, projetées verticalement sur l'autre, y découpent un système conjugué.*

En effet, les lignes asymptotiques des deux surfaces (S) et ($S_0$)

sont respectivement définies par les équations différentielles

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$
$$r_1\,dx^2 + 2s_1\,dx\,dy + t_1\,dy^2 = 0,$$

qui feront connaître les projections de ces lignes sur le plan des $xy$; et l'équation (11) exprime qu'en chaque point de ce plan les directions relatives à l'une des surfaces divisent harmoniquement l'angle formé par les deux directions relatives à l'autre surface.

Étant donnés une surface quelconque (A) et un point O, proposons-nous de trouver une surface ($A_0$) telle que la perspective de ses lignes asymptotiques sur (A), obtenue en prenant le point O pour point de vue, dessine sur (A) un système conjugué. Il suffira de faire une transformation homographique qui rejette le point O à l'infini, et l'on sera ramené au problème précédent. Par exemple, si l'on veut déterminer toutes les surfaces pour lesquelles les lignes asymptotiques vues d'un point O paraissent se couper à angle droit, il suffira d'effectuer une transformation homographique rejetant le point O à l'infini et de déterminer les déformations infiniment petites de la surface du second degré qui correspond, après cette transformation, à une sphère de centre O.

859. Appliquons les méthodes précédentes au paraboloïde défini par l'équation

$$z = xy.$$

L'équation (11) nous donnera ici

$$s_1 = 0.$$

Pour la commodité des calculs prenons l'intégrale sous la forme

$$z_1 = X' + Y', \tag{12}$$

X désignant une fonction de $x$ et Y une fonction de $y$. Les inconnues $c$, $x_1$, $y_1$ se détermineront sans difficulté et l'on aura, en choisissant convenablement X, Y et adoptant les notations les plus simples

$$c = xX'' - X' - yY'' + Y',$$

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= 2Y - y(X' + Y'),\\ y_1 &= 2X - x(X' + Y'),\\ z_1 &= X' + Y'.\end{aligned}\right. \tag{13}$$

La surface ainsi obtenue, qui dépend de deux fonctions arbitraires, a ses lignes asymptotiques déterminées par l'équation différentielle

$$X''' dx^2 + Y''' dy^2 = 0,$$

où les variables sont séparées.

860. Nous ferons connaître plus loin des propositions générales d'après lesquelles le résultat précédent peut être étendu à toute surface du second degré. Mais, dès à présent, il est bon de remarquer *a priori* que le problème de la déformation infiniment petite peut être résolu pour toute surface du second degré. Nous avons vu, en effet, que toute surface réglée admet une série de déformations finies dans lesquelles ses génératrices demeurent rectilignes. A ces déformations finies correspondent évidemment des déformations infiniment petites qui dépendent d'une fonction arbitraire à une variable. Or, comme une surface du second degré est doublement réglée, l'application de la remarque précédente nous en fera connaître des déformations infiniment petites, qui se distribueront en deux séries bien distinctes, se rattachant respectivement aux deux systèmes de génératrices. Et comme les équations du problème de la déformation infiniment petite sont linéaires, *il suffira de superposer ces deux séries particulières de déformations infiniment petites pour obtenir la solution la plus générale du problème proposé.*

En terminant ce Chapitre nous indiquerons rapidement comment l'étude et la solution du problème de la déformation infiniment petite de la sphère peuvent être rattachées à la théorie des surfaces minima.

861. Soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{14}$$

l'équation de la sphère donnée (S) et soit ($S_1$) la surface, lieu du point ($x_1, y_1, z_1$), qui lui correspond avec orthogonalité des éléments, de sorte que l'on ait

$$dx\, dx_1 + dy\, dy_1 + dz\, dz_1 = 0. \tag{15}$$

Désignons toujours par M, $M_1$ deux points correspondants sur

les deux surfaces et menons par le point $M_1$ une droite $M_1H$ parallèle au rayon de la sphère qui va aboutir en M. Nous allons montrer que la droite $M_1H$ engendre une congruence *isotrope*, c'est-à-dire [I, p. 420] qu'elle est tangente à deux développables circonscrites au cercle de l'infini.

Nous rattacherons cette proposition particulière à une autre plus générale que nous retrouverons plus loin (n° 891) et qui est due à Ribaucour.

Soient M, $M_1$ deux points correspondants sur deux surfaces *quelconques* qui se correspondent avec orthogonalité des éléments; menons par le point $M_1$ la droite $M_1H$ parallèle à la *normale* de la surface (S) en M; et, de plus, effectuons la représentation sphérique de cette surface (S) sur une sphère de rayon 1 ayant son centre en un point O; soit $Om$ le rayon de la sphère parallèle à la normale de (S) en M; nous allons déterminer les plans focaux de la congruence engendrée par la droite $M_1H$.

A cet effet, déplaçons-nous de telle manière que $M_1H$ engendre une des développables de la congruence. Le point M viendra en un point infiniment voisin $M'$ et de même $M_1$ en $M'_1$, $m$ en $m'$. Le plan tangent de la développable suivant $M_1H$ est parallèle au plan déterminé par les deux rayons consécutifs de la sphère $Om$, $Om'$; et, par conséquent, il en est de même de la direction $M_1M'_1$. Or, cette direction $M_1M'_1$ doit être déjà perpendiculaire à $MM'$. Elle devra donc se confondre avec $Om$ s'il y a dans le plan $mOm'$ une seule direction perpendiculaire à $MM'$. Comme il est impossible, on le reconnaîtra aisément [1], que $M_1M'_1$ soit parallèle à $Om$, il faut que $MM'$ soit perpendiculaire à deux droites distinctes du plan $mOm'$, c'est-à-dire à ce plan. Or, ceci revient à dire que la tangente $MM'$ de la surface (S) doit être perpendiculaire à son image sphérique, c'est-à-dire doit être une tangente asymptotique [I, p. 201]. Donc, *aux développables de la congruence engendrée par* $M_1H$ *correspondent les asymptotiques de* (S) ou, ce qui revient au même, les *deux plans focaux de la congruence*

---

[1] Si $M_1M'_1$ était parallèle à $Om$, les plans tangents aux deux surfaces (S), ($S_1$) en M et en $M_1$ seraient rectangulaires, ce qui est impossible, car alors à tous les déplacements s'effectuant autour de M correspondrait toujours le même déplacement infiniment petit à partir de $M_1$ sur ($S_1$).

*engendrée par la droite* $M_1H$ *sont perpendiculaires aux tangentes asymptotiques de* (S) *en* M.

Appliquons cette proposition, qui a été énoncée par Ribaucour au n° 188 de son *Étude sur les Elassoïdes,* au cas où la surface (S) est une sphère de centre O. La droite $M_1H$ devient la parallèle au rayon OM de la sphère (S); les tangentes asymptotiques de (S) sont les génératrices rectilignes de la sphère qui passent en M. Par suite, *les deux plans focaux de la congruence engendrée par la droite* $M_1H$, *étant perpendiculaires à des droites isotropes, sont nécessairement isotropes,* c'est-à-dire tangents au cercle de l'infini, et *les deux nappes de la surface focale de cette congruence sont des développables isotropes.*

862. Le calcul suivant conduit au même résultat. Les coordonnées d'un point quelconque de $M_1H$ ont pour expressions

$$x_1+x\rho, \qquad y_1+y\rho, \qquad z_1+z\rho.$$

Pour déterminer les développables de la congruence, exprimons qu'il existe un déplacement dans lequel ce point décrit une courbe tangente à la droite. Nous aurons

$$\frac{d(x_1+x\rho)}{x}=\frac{d(y_1+y\rho)}{y}=\frac{d(z_1+z\rho)}{z},$$

ou, en introduisant une inconnue auxiliaire $d\lambda$

$$(16)\qquad \begin{cases} dx_1+\rho\,dx=x\,d\lambda,\\ dy_1+\rho\,dy=y\,d\lambda,\\ dz_1+\rho\,dz=z\,d\lambda.\end{cases}$$

Si l'on multiplie ces équations respectivement par $dx$, $dy$, $dz$ et si on les ajoute en tenant compte des relations (14) et (15), il vient

$$\rho(dx^2+dy^2+dz^2)=0.$$

Comme $\rho$ ne peut être nul, on voit que les développables de la congruence correspondent aux lignes de longueur nulle de la sphère, ce qui équivaut au résultat déjà établi par la Géométrie.

863. Dans les rapides indications que nous avons données [I,

p. 419-421] sur les congruences *isotropes*, nous avons signalé une propriété de ces congruences, à savoir que les surfaces réglées élémentaires contenant une droite quelconque de la congruence ont toutes, pour cette droite, le même point central et le même paramètre de distribution; d'où il résulte que la *surface moyenne* (lieu du milieu du segment focal) *contient les lignes de striction de toutes les surfaces réglées formées avec des droites de la congruence*. Or il est très aisé de montrer que *cette surface moyenne est ici la surface* $(S_1)$.

En effet, si l'on considère, d'une manière générale, une surface réglée engendrée par une droite dont les cosinus directeurs seront désignés par $x$, $y$, $z$, il est évident que $dx$, $dy$, $dz$ sont les paramètres directeurs de la normale au plan central, puisque cette normale, perpendiculaire à la génératrice, est, en même temps, parallèle au plan tangent à l'infini. Donc si $x_1$, $y_1$, $z_1$ sont les coordonnées d'un point de la ligne de striction, on a

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0,$$

en tous les points de cette ligne et seulement en ces points. Cette relation étant identique à l'équation (15) et se trouvant vérifiée pour chaque point de la surface moyenne, il en résulte la propriété annoncée. On peut donc énoncer la proposition suivante, qui est due à Ribaucour (¹) :

*Pour obtenir la surface la plus générale correspondant par orthogonalité des éléments à la sphère, il suffit de prendre la surface moyenne de la congruence isotrope la plus générale.*

On a vu [I, p. 420] que l'enveloppée moyenne d'une telle congruence est une surface minima.

En rapprochant du reste les différents raisonnements que nous venons de faire on voit que, *seules, les congruences isotropes jouissent de la propriété d'avoir les lignes de striction des différentes surfaces réglées que l'on peut former avec les*

---

(¹) A. Ribaucour, *Étude des Elassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, Chapitre VIII (Mémoire déjà cité [I, p. 419]).

*droites qui les composent, toutes distribuées sur une même surface* (¹).

864. Revenons à la relation (15) et appliquons un théorème donné plus haut. Si, $k$ désignant une constante, nous considérons les deux surfaces lieux des points $(x_1 + kx, y_1 + ky, z_1 + kz)$ et $(x_1 - kx, y_1 - ky, z_1 - kz)$, c'est-à-dire les surfaces obtenues en portant, dans les deux sens à partir de $M_1$, sur les droites de la congruence isotrope, des longueurs égales à $k$, on aura deux surfaces applicables l'une sur l'autre de telle manière que les points correspondants soient à une distance invariable l'un de l'autre. Réciproquement, si les *extrémités d'un segment* $PP_1$ *de longueur constante, dont la direction dépend de deux paramètres, décrivent deux surfaces applicables l'une sur l'autre, la droite* $PP_1$ *engendre une congruence isotrope* (²).

---

(¹) C'est d'ailleurs ce que l'on peut établir directement comme il suit :
Prenons une droite de la congruence pour axe des $z$ et soient

$$y = m'x, \qquad y = m''x$$

les équations des plans focaux, $z'$, $z''$ les $z$ des points focaux.

Pour déterminer le point central relatif à l'une des surfaces élémentaires contenant la droite, il faut lui adjoindre le point à l'infini, les points focaux et exprimer que le rapport anharmonique des quatre points de contact est égal à celui des plans tangents correspondants, ce qui donne

$$\frac{z - z'}{z - z''} = \frac{m - m'}{m - m''} : \frac{-\frac{1}{m} - m'}{-\frac{1}{m} - m''},$$

$m$ étant le coefficient angulaire du plan central. Pour que $z$ soit invariable, il faut que la fraction rationnelle

$$\frac{(m - m')(1 + mm'')}{(m - m'')(1 + mm')}$$

soit indépendante de $m$, ce qui donne, en écartant l'hypothèse inadmissible $m' = m''$,

$$1 + m'^2 = 0, \qquad 1 + m''^2 = 0.$$

Les plans focaux sont donc nécessairement isotropes.

(²) A. Ribaucour, Mémoire cité (Chapitre VIII). Le cas où la direction du segment $PP_1$ ne dépend que d'un seul paramètre a été traité par M. Caronnet dans un article *Sur les couples de surfaces applicables* inséré en 1893 au tome XXI du *Bulletin de la Société mathématique de France*.

Car la surface décrite par le milieu de $PP_1$ et la sphère obtenue en menant par un point fixe des parallèles à $PP_1$ se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires.

**865.** Il nous reste à indiquer comment on détermine la surface moyenne d'une congruence isotrope.

Soient

$$(1-u^2)x+i(1+u^2)y+2uz+4f(u)=0, \tag{17}$$

$$(1-u_1^2)x-i(1+u_1^2)y+2u_1z+4f_1(u_1)=0 \tag{18}$$

les équations de deux plans tangents à deux développables isotropes [I, p. 341]. Leur ensemble représente une tangente double de ces deux développables, c'est-à-dire la droite la plus générale de la congruence isotrope définie par ces développables. Il suffit de joindre à ces deux équations celle du *plan moyen*, c'est-à-dire du plan tangent à la surface minima correspondante [I, p. 296, 297].

$$(u+u_1)x+i(u_1-u)y+(uu_1-1)z+\xi=0, \tag{19}$$

où l'on a

$$\xi=2u_1f(u)+2uf_1(u_1)-(1+uu_1)[f'(u)+f_1'(u_1)],$$

puis de résoudre les trois équations précédentes, ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned} x_1&=\frac{u+u_1}{1+uu_1}(f'+f_1')-2\frac{f+f_1}{1+uu_1},\\ y_1&=i\frac{u_1-u}{1+uu_1}(f'+f_1')-2i\frac{f_1-f}{1+uu_1},\\ z_1&=\frac{uu_1-1}{1+uu_1}(f'+f_1')-2\frac{uf_1+u_1f}{1+uu_1}.\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Telles sont les expressions des coordonnées d'un point de la surface cherchée. Celles du point correspondant de la sphère sont

$$x=\frac{u+u_1}{1+uu_1},\qquad y=i\frac{u_1-u}{1+uu_1},\qquad z=\frac{uu_1-1}{1+uu_1}, \tag{21}$$

et il est très aisé de vérifier avec ces formules la relation identique (15).

**866.** Nous terminerons en montrant comment on peut, dans le cas général, transformer l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait $z_1$ considérée comme fonction de $x$ et de $y$.

Remarquons d'abord que les caractéristiques de cette équation sont les lignes asymptotiques de (S); car leur équation différentielle est [I, p. 133]

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Si donc on prend pour variables indépendantes les paramètres $\alpha$ et $\beta$ de ces lignes asymptotiques, elle prendra la forme

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \mathrm{A}\frac{\partial z_1}{\partial\alpha} + \mathrm{B}\frac{\partial z_1}{\partial\beta} = 0.$$

A et B se déterminent sans calcul par la remarque suivante : comme l'équation (11), la précédente doit admettre les solutions particulières $z_1 = x$, $z_1 = y$.

On pourra donc l'écrire sous la forme

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \dfrac{\partial z_1}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial z_1}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \dfrac{\partial x}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial x}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \dfrac{\partial v}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{22}$$

C'est l'équation ponctuelle relative au réseau plan (nécessairement conjugué comme tous les réseaux plans) formé par la projection sur le plan des $xy$ des lignes asymptotiques de la surface (S).

On verra plus loin que cette équation ponctuelle a ses invariants égaux.

# CHAPITRE II.

## DÉFORMATION INFINIMENT PETITE.

## DEUXIÈME SOLUTION : LES FORMULES DE M. LELIEUVRE.

Introduction directe des lignes asymptotiques. — Réduction du problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles à invariants égaux ; ce qui montre qu'on pourra obtenir une suite illimitée de surfaces dont on connaîtra les lignes asymptotiques et pour lesquelles on saura résoudre le problème de la déformation infiniment petite. — Formules de M. Lelieuvre. — Leur démonstration directe. — Comment on peut en déduire, par une méthode rapide, la solution du problème de la déformation infiniment petite. — Applications de ces formules. — Propriété de la représentation sphérique des lignes asymptotiques qui montre que cette représentation sphérique ne saurait être choisie arbitrairement. — Théorème de M. Kœnigs : les perspectives des lignes asymptotiques sur un plan quelconque déterminent un réseau plan (nécessairement conjugué comme tous les réseaux plans) à invariants *ponctuels* égaux. — Interprétation géométrique de l'égalité des invariants pour l'équation linéaire ponctuelle ou tangentielle relative à un réseau conjugué tracé sur une surface quelconque. — Élément linéaire d'une surface rapportée à ses lignes asymptotiques. — Démonstration nouvelle du théorème d'Enneper relatif à la torsion des lignes asymptotiques. — Application aux surfaces à courbure constante. — Quand on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une telle surface, on sait le faire aussi pour toutes celles qui en dérivent par la transformation de M. Bianchi. — Formules analogues à celles de M. Lelieuvre quand les variables ont été choisies d'une manière quelconque. — La solution générale du problème de la déformation infiniment petite écrite avec des variables quelconques.

---

867. La seconde méthode que nous allons exposer, pour résoudre le problème de la déformation infiniment petite, c'est-à-dire pour trouver les fonctions les plus générales, $x_1, y_1, z_1$, qui vérifient l'équation aux différentielles totales

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0, \tag{1}$$

repose sur l'emploi presque immédiat du système de coordonnées formé avec les deux familles de lignes asymptotiques. Conservant les notations habituelles relatives à la surface donnée (S) lieu du point $(x, y, z)$, désignons par $p, q, r, s, t$ les dérivées premières

et secondes de $z$ considérée comme fonction de $x$, $y$ et remplaçons $dz$ par sa valeur $p\,dx + q\,dy$. L'équation (1) deviendra

$$dx(dx_1 + p\,dz_1) + dy(dy_1 + q\,dz_1) = 0.$$

On peut donc poser

$$dx_1 + p\,dz_1 = r_1\,dy, \qquad dy_1 + q\,dz_1 = -r_1\,dx,$$

$r_1$ désignant une inconnue auxiliaire. L'équation (1) est donc remplacée par le groupe des trois suivantes

$$(2)\qquad \begin{cases} dz = \quad p\,dx + q\,dy, \\ dx_1 = \quad r_1\,dy - p\,dz_1, \\ dy_1 = -r_1\,dx - q\,dz_1. \end{cases}$$

Pour étudier l'intégration de ce système, nous choisirons comme variables indépendantes les paramètres des lignes asymptotiques de la surface (S). Comme ces lignes sont définies par l'équation différentielle

$$dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

on voit que, si l'on désigne leurs paramètres par $\alpha$ et $\beta$, l'équation précédente devra contenir le seul terme en $d\alpha\,d\beta$; et l'on aura, par suite,

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial q}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \beta} = 0.$$

On peut donc poser, en introduisant deux inconnues auxiliaires $\lambda$ et $\mu$,

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}, & \dfrac{\partial x}{\partial \beta} = \mu\dfrac{\partial q}{\partial \beta}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = -\lambda\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}, & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = -\mu\dfrac{\partial p}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Mais, comme on a

$$dz = p\,dx + q\,dy = \left(p\frac{\partial x}{\partial \alpha} + q\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)d\alpha + \left(p\frac{\partial x}{\partial \beta} + q\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)d\beta$$

il vient, en écrivant la condition d'intégrabilité,

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(p\frac{\partial x}{\partial \alpha} + q\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(p\frac{\partial x}{\partial \beta} + q\frac{\partial y}{\partial \beta}\right),$$

et en développant,

$$(4)\qquad \frac{\partial p}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial q}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} = 0.$$

Remplaçons, dans cette relation, les dérivées de $x$ et de $y$ par leurs valeurs déduites des équations (3); nous trouverons

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{\partial q}{\partial \beta} - \frac{\partial p}{\partial \beta}\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)(\lambda + \mu) = 0.$$

Donc, comme on a implicitement écarté l'hypothèse où (S) serait développable, il vient

$$\mu = -\lambda,$$

et les formules (3) peuvent être remplacées par les suivantes

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda\dfrac{\partial q}{\partial \alpha}, & \dfrac{\partial x}{\partial \beta} = -\lambda\dfrac{\partial q}{\partial \beta}, \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = -\lambda\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}, & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = \lambda\dfrac{\partial p}{\partial \beta}, \end{cases}$$

qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des lignes asymptotiques.

Réciproquement, toutes les fois que les équations (5) seront vérifiées, il en sera de même de la condition d'intégrabilité (4), l'expression $p\,dx + q\,dy$ sera une différentielle exacte $dz$; et la surface (S) lieu du point $(x, y, z)$ admettra $\alpha$ et $\beta$ pour paramètres de ses lignes asymptotiques; car, en vertu des équations (5), on aura identiquement

$$dp\,dx + dq\,dy = -2\lambda\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{\partial q}{\partial \beta} - \frac{\partial p}{\partial \beta}\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)d\alpha\,d\beta.$$

On vérifiera d'ailleurs aisément que, si $r$, $s$, $t$ désignent, comme nous l'avons supposé, les dérivées secondes de $z$ considérée comme fonction de $x$, $y$, on a

$$\lambda^2 = \frac{1}{s^2 - rt};$$

car les premières équations (5) peuvent s'écrire

$$(1 - \lambda s)\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \lambda t\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0, \qquad (1 + \lambda s)\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \lambda r\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0,$$

et donnent, par l'élimination du quotient des dérivées $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, la relation

$$(6) \qquad 1 = \lambda^2(s^2 - rt).$$

868. Ces formules relatives aux lignes asymptotiques étant établies, revenons au problème proposé et supposons qu'on ait pris pour variables indépendantes les paramètres $\alpha$ et $\beta$. On aura le système (5) et il restera à intégrer les deux équations

$$dy_1 = -r_1\,dx - q\,dz_1 = -\left(r_1\frac{\partial x}{\partial x} + q\frac{\partial z_1}{\partial \alpha}\right)d\alpha - \left(r_1\frac{\partial x}{\partial \beta} + q\frac{\partial z_1}{\partial \beta}\right)d\beta,$$
$$dx_1 = \quad r_1\,dy - p\,dz_1 = \quad \left(r_1\frac{\partial y}{\partial \alpha} - p\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)d\alpha + \left(r_1\frac{\partial y}{\partial \beta} - p\frac{\partial z_1}{\partial \beta}\right)d\beta.$$

En écrivant les conditions d'intégrabilité, on obtient les deux conditions

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial r_1}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + \dfrac{\partial q}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z_1}{\partial \beta} - \dfrac{\partial r_1}{\partial \beta}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial q}{\partial \beta}\dfrac{\partial z_1}{\partial \alpha} = 0, \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial \alpha}\dfrac{\partial y}{\partial \beta} - \dfrac{\partial p}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z_1}{\partial \beta} - \dfrac{\partial r_1}{\partial \beta}\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial p}{\partial \beta}\dfrac{\partial z_1}{\partial \alpha} = 0, \end{array}\right.$$

qui sont à la fois nécessaires et suffisantes et qui feront connaître $r_1$ et $z_1$.

Si l'on y remplace les dérivées de $x$ et de $y$ par leurs valeurs tirées des équations (5), on a

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial z_1}{\partial \beta} - \lambda\frac{\partial r_1}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial q}{\partial \beta}\left(\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} + \lambda\frac{\partial r_1}{\partial \alpha}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial z_1}{\partial \beta} - \lambda\frac{\partial r_1}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial p}{\partial \beta}\left(\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} + \lambda\frac{\partial r_1}{\partial \alpha}\right) = 0,$$

ou, plus simplement,

$$(8) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z_1}{\partial \alpha} = -\lambda\dfrac{\partial r_1}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial \beta} = \quad \lambda\dfrac{\partial r_1}{\partial \beta}. \end{array}\right.$$

Ainsi, *tout se ramène à l'intégration générale de ce système,* intégration qui fera connaître $z_1$ et $r_1$ ; après quoi $x_1$ et $y_1$ se déduiront des formules (2) par de simples quadratures. Telle est la marche générale et très simple de la solution.

869. Considérons d'une manière générale le système

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} = -\lambda \dfrac{\partial v}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \beta} = \lambda \dfrac{\partial v}{\partial \beta}, \end{cases}$$

où $u$ et $v$ désignent deux fonctions inconnues et où $\lambda$ est cette fonction de $\alpha$ et $\beta$ qui figure dans les équations (5) et (8). Ces différentes équations expriment purement et simplement que ce système (A) est vérifié, si l'on y remplace $u$ et $v$ soit par $x$ et $-q$, soit par $y$ et $p$, soit enfin par $z_1$ et $r_1$. On voit donc que, *dès que l'on connaîtra des formes de la fonction $\lambda$ permettant l'intégration complète du système* (A), *il en résultera pour nous la connaissance d'une infinité de surfaces* (S) *dont on pourra déterminer les lignes asymptotiques et pour lesquelles on saura résoudre le problème de la déformation infiniment petite. Ces surfaces* (S) *seront déterminées en prenant pour $y$ et $p$ d'une part, pour $x$ et $-q$ d'autre part, deux systèmes quelconques de solutions*. D'autre part, pour qu'on sache résoudre ce problème pour une surface donnée (S), il faut pouvoir intégrer le système (A) correspondant. Tout se ramène donc en dernière analyse à l'étude et à l'intégration de tels systèmes.

Or nous les avons déjà considérés [II, p. 147] et nous avons déjà signalé les rapports étroits qu'ils présentent avec les équations à invariants égaux. En conservant la notation adoptée au n° 390, nous savons que l'élimination de $u$ nous conduira à l'équation

$$(9)\qquad \mathfrak{F}(v\sqrt{\lambda}) = \mathfrak{F}(\sqrt{\lambda}),$$

et celle de $v$ à la suivante

$$(10)\qquad \mathfrak{F}\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

où $\mathfrak{F}(z)$ désigne le symbole $\frac{1}{z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta}$.

D'après cela, si l'on pose

$$\mathfrak{F}(\sqrt{\lambda}) = k,$$

l'équation

$$(11)\qquad \mathfrak{F}(z) = k = \mathfrak{F}(\sqrt{\lambda})$$

doit admettre les solutions particulières

$$\sqrt{\lambda},\quad p\sqrt{\lambda},\quad q\sqrt{\lambda}\quad \text{et}\quad r_1\sqrt{\lambda},$$

que l'on obtient en remplaçant, dans l'équation (9), $\varphi$ par les différentes valeurs qu'il peut recevoir. Les trois premières solutions seront connues dès que l'on connaîtra la surface (S). Désignons-les par $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, ou, plus exactement, posons

$$(12)\qquad \sqrt{\lambda} = \theta_3,\qquad p\sqrt{\lambda} = -\theta_1,\qquad q\sqrt{\lambda} = -\theta_2.$$

Comme $r_1$ est une fonction inconnue, nous poserons

$$r_1\sqrt{\lambda} = -\omega,$$

$\omega$ étant la solution générale de l'équation (11). Remontant de proche en proche, les formules (5) nous donneront d'abord

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \theta_3^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\theta_1}{\theta_3}\right) = \theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = -\theta_3^2 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\theta_1}{\theta_3}\right) = -\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} + \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta},$$

et de même

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha},\qquad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta} + \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta},$$

et de là on déduira $dz$ par la formule

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

de sorte que, tout calcul fait, on aura les coordonnées $x$, $y$, $z$ par les formules

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta}\right) d\beta, \\ y = \displaystyle\int \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta}\right) d\beta, \\ z = \displaystyle\int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta}\right) d\beta; \end{cases}$$

et la surface correspondante ($S_1$) sera définie par les formules

$$(C)\quad \begin{cases} x_1 = \int\left(\theta_1 \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right)d\beta, \\ y_1 = \int\left(\theta_2 \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_2\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right)d\beta, \\ z_1 = \int\left(\theta_3 \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_3\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega\frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right)d\beta; \end{cases}$$

$\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ étant trois solutions particulières, et $\omega$ la solution générale, d'une équation de la forme suivante [1]

$$(D)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\theta.$$

**870.** Un jeune géomètre, M. Lelieuvre, a été conduit par ses recherches personnelles aux élégantes formules (B) qui définissent une surface rapportée à ses lignes asymptotiques [2]. Voici comment on peut les démontrer par une méthode simple et directe.

Désignons par $c$, $c'$, $c''$ les cosinus directeurs de la normale à la surface (S). On aura

$$(13)\qquad \mathrm{S}\, c\frac{\partial x}{\partial\alpha} = 0, \qquad \mathrm{S}\, c\frac{\partial x}{\partial\beta} = 0;$$

et de là on déduit, en différentiant la première équation par rapport à $\beta$, la seconde par rapport à $\alpha$, et retranchant,

$$(14)\qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial c}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha} - \frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}\right) = 0.$$

Comme l'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$\mathrm{S}\, dc\, dx = 0,$$

on obtient, en égalant à zéro les coefficients de $d\alpha^2$, $d\beta^2$ dans

---

(1) Dans la Note déjà citée de 1870, M. Moutard n'a pas publié sa méthode, mais il annonce que la difficulté du problème se ramène à l'intégration d'une équation de la forme (D).

(2) LELIEUVRE, *Sur les lignes asymptotiques et leur représentation sphérique* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1888, p. 126).

cette équation, les deux relations

$$(15)\qquad \mathrm{S}\frac{\partial c}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial c}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0.$$

Les équations (13) et (15) peuvent être remplacées par les suivantes

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = \lambda\left(c'\dfrac{\partial c''}{\partial \alpha} - c''\dfrac{\partial c'}{\partial \alpha}\right), & \dfrac{\partial x}{\partial \beta} = \mu\left(c'\dfrac{\partial c''}{\partial \beta} - c''\dfrac{\partial c'}{\partial \beta}\right), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = \lambda\left(c''\dfrac{\partial c}{\partial \alpha} - c\dfrac{\partial c''}{\partial \alpha}\right), & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = \mu\left(c''\dfrac{\partial c}{\partial \beta} - c\dfrac{\partial c''}{\partial \beta}\right), \\ \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} = \lambda\left(c\dfrac{\partial c'}{\partial \alpha} - c'\dfrac{\partial c}{\partial \alpha}\right), & \dfrac{\partial z}{\partial \beta} = \mu\left(c\dfrac{\partial c'}{\partial \beta} - c'\dfrac{\partial c}{\partial \beta}\right), \end{cases}$$

où $\lambda$ et $\mu$ désignent deux fonctions auxiliaires. Si l'on substitue les valeurs ainsi obtenues des dérivées de $x$, $y$, $z$ dans la condition d'intégrabilité (14) il vient

$$(\lambda + \mu)\sum \pm c\frac{\partial c'}{\partial \alpha}\frac{\partial c''}{\partial \beta} = 0.$$

Le déterminant n'étant pas nul [1], on doit faire $\mu = -\lambda$. Portant cette valeur de $\mu$ dans les formules (16) et posant

$$(17)\qquad c\sqrt{\lambda} = \theta_1, \qquad c'\sqrt{\lambda} = \theta_2, \qquad c''\sqrt{\lambda} = \theta_3,$$

on obtient les formules définitives

$$(18)\qquad \begin{cases} dx = \left(\theta_2\dfrac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} - \theta_3\dfrac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_2\dfrac{\partial \theta_3}{\partial \beta} - \theta_3\dfrac{\partial \theta_2}{\partial \beta}\right)d\beta, \\ dy = \left(\theta_3\dfrac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} - \theta_1\dfrac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_3\dfrac{\partial \theta_1}{\partial \beta} - \theta_1\dfrac{\partial \theta_3}{\partial \beta}\right)d\beta, \\ dz = \left(\theta_1\dfrac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \theta_2\dfrac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_1\dfrac{\partial \theta_2}{\partial \beta} - \theta_2\dfrac{\partial \theta_1}{\partial \beta}\right)d\beta. \end{cases}$$

Si l'on exprime enfin que $dx$, $dy$, $dz$ sont des différentielles

---

[1] Si le déterminant était nul, on aurait

$$\frac{c'}{c} = f\left(\frac{c''}{c}\right);$$

la surface serait développable. Or ce résultat est inconciliable avec l'hypothèse que les paramètres $\alpha$ et $\beta$ des lignes asymptotiques sont des variables distinctes.

exactes, on est conduit seulement à deux relations

$$\frac{1}{\theta_3}\frac{\partial^2\theta_3}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{1}{\theta_2}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{1}{\theta_1}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

qui nous montrent que $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sont des solutions particulières d'une équation de la forme

$$(19)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=k\theta,$$

et complètent la démonstration des formules (B).

**871.** Si l'on prend ces formules comme point de départ, la solution du problème proposé s'obtient d'une manière nette et rapide. Reprenons en effet l'équation à vérifier

$$dx\,dx_1+dy\,dy_1+dz\,dz_1=0,$$

et remplaçons-y $dx$, $dy$, $dz$ par leurs valeurs tirées des formules (B). En égalant à zéro les coefficients de $d\alpha^2$, $d\alpha\,d\beta$, $d\beta^2$, nous aurons les trois équations

$$\begin{vmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3\\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} & \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial x_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial y_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial z_1}{\partial\alpha}\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3\\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta} & \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta} & \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\\ \frac{\partial x_1}{\partial\beta} & \frac{\partial y_1}{\partial\beta} & \frac{\partial z_1}{\partial\beta}\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3\\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} & \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial x_1}{\partial\beta} & \frac{\partial y_1}{\partial\beta} & \frac{\partial z_1}{\partial\beta}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3\\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta} & \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta} & \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\\ \frac{\partial x_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial y_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial z_1}{\partial\alpha}\end{vmatrix}=0.$$

Les deux premières nous permettent de poser

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}&=A\theta_1+B\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}, & \frac{\partial x_1}{\partial\beta}&=A'\theta_1+B'\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta},\\ \frac{\partial y_1}{\partial\alpha}&=A\theta_2+B\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}, & \frac{\partial y_1}{\partial\beta}&=A'\theta_2+B'\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta},\\ \frac{\partial z_1}{\partial\alpha}&=A\theta_3+B\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}, & \frac{\partial z_1}{\partial\beta}&=A'\theta_3+B'\frac{\partial\theta_3}{\partial\beta},\end{aligned}\right.$$

A, B, A′, B′ étant des fonctions auxiliaires, et la troisième conduit

à la relation

$$B + B' = 0.$$

On peut donc poser, en changeant la notation,

$$B = -B' = -\omega.$$

Écrivons maintenant les conditions d'intégrabilité pour $x_1, y_1, z_1$ : nous aurons, par exemple,

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\theta_1 - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(A'\theta_1 + \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right),$$

ou, en développant et remplaçant $\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ par sa valeur déduite de l'équation (19),

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial A'}{\partial\alpha} - 2k\omega\right)\theta_1 - \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} + A'\right) + \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\left(A - \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right) = 0.$$

Comme l'équation doit subsister quand on y remplace $\theta_1$ par $\theta_2$ et $\theta_3$, il faut qu'elle ait lieu identiquement; ce qui donne

$$A = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}, \qquad A' = -\frac{\partial\omega}{\partial\beta},$$

$$\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial A'}{\partial\beta} - 2k\omega = 0,$$

ou encore

(21) $$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\omega.$$

Remplaçant A, A', B, B' par leurs valeurs dans les formules (20), on retrouve bien les formules (C) de notre première solution.

**872.** Cette solution écarte, nous l'avons déjà remarqué, le cas où la surface (S) serait développable; mais, comme on sait résoudre le problème de la déformation finie pour toute surface développable, on saura, par cela même, résoudre aussi celui de la déformation infiniment petite.

Pour le plan, par exemple, qu'on peut supposer représenté par l'équation

$$z = 0,$$

on aura

$$x_1 = -hy + a, \qquad y_1 = hx + b,$$

, $a$, $b$ étant des constantes et $z_1$ pourra être choisi arbitraire-
ıent. Nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

873. Revenons aux formules (B) où $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sont liés aux co-
ınus directeurs $c$, $c'$, $c''$ de la normale par les relations (17), d'où
on déduit immédiatement

$$\lambda = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2. \tag{22}$$

En substituant $c$, $c'$, $c''$ à $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ on peut encore écrire les
quations (B) sous la forme

$$\text{(B}'\text{)}\quad \left\{ \begin{aligned} dx &= \lambda\left(c'\frac{\partial c''}{\partial\alpha} - c''\frac{\partial c'}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \lambda\left(c'\frac{\partial c''}{\partial\beta} - c''\frac{\partial c'}{\partial\beta}\right)d\beta,\\ dy &= \lambda\left(c''\frac{\partial c}{\partial\alpha} - c\frac{\partial c''}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \lambda\left(c''\frac{\partial c}{\partial\beta} - c\frac{\partial c''}{\partial\beta}\right)d\beta,\\ dz &= \lambda\left(c\frac{\partial c'}{\partial\alpha} - c'\frac{\partial c}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \lambda\left(c\frac{dc'}{\partial\beta} - c'\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)d\beta, \end{aligned}\right.$$

Įui, d'ailleurs, se déduit immédiatement des formules (16) où l'on
'emplacera $\mu$ par $-\lambda$. La comparaison des formules précédentes
ıvec celles que nous avons données d'après Gauss au Livre VII,
Chapitre III III, p. 242 et suiv.], permet de faire une étude
ıpprofondie de la surface rapportée à ses lignes asymptotiques.

Si l'on pose

$$\text{(23)}\qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial c}{\partial\alpha}\right)^2 = e, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial c}{\partial\beta} = f, \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)^2 = g,$$

on verra aisément que l'on a

$$\text{(23)}'\qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 = \lambda^2 e, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} = -\lambda^2 f, \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2 = \lambda^2 g,$$

et l'on pourra appliquer toutes les formules du Livre VII, Cha-
pitre III, en y remplaçant $u$ et $v$ par $\alpha$ et $\beta$, puis faisant les substi-
tutions suivantes

$$\text{(24)}\qquad H = -\lambda^2\Delta, \qquad D = 0, \qquad D' = \lambda^3\Delta^2, \qquad D'' = 0;$$

$\Delta$ désignant le déterminant

$$\text{(25)}\qquad \Delta = \sum \pm c\frac{\partial c'}{\partial\alpha}\frac{\partial c''}{\partial\beta},$$

à la relation

$$B + B' = 0.$$

On peut donc poser, en changeant la notation,

$$B = -B' = -\omega.$$

Écrivons maintenant les conditions d'intégrabilité pour $x_1$, $y_1$, $z_1$ : nous aurons, par exemple,

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\theta_1 - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(A'\theta_1 + \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right),$$

ou, en développant et remplaçant $\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ par sa valeur déduite de l'équation (19),

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial A'}{\partial\alpha} - 2k\omega\right)\theta_1 - \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} + A'\right) + \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\left(A - \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right) = 0.$$

Comme l'équation doit subsister quand on y remplace $\theta_1$ par $\theta_2$ et $\theta_3$, il faut qu'elle ait lieu identiquement; ce qui donne

$$A = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}, \qquad A' = -\frac{\partial\omega}{\partial\beta},$$

$$\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial A'}{\partial\beta} - 2k\omega = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\omega. \tag{21}$$

Remplaçant A, A′, B, B′ par leurs valeurs dans les formules (20), on retrouve bien les formules (C) de notre première solution.

**872.** Cette solution écarte, nous l'avons déjà remarqué, le cas où la surface (S) serait développable; mais, comme on sait résoudre le problème de la déformation finie pour toute surface développable, on saura, par cela même, résoudre aussi celui de la déformation infiniment petite.

Pour le plan, par exemple, qu'on peut supposer représenté par l'équation

$$z = 0,$$

on aura

$$x_1 = -hy + a, \qquad y_1 = hx + b,$$

, $a$, $b$ étant des constantes et $z_1$ pourra être choisi arbitraire-
ıent. Nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

873. Revenons aux formules (B) où $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sont liés aux co-
inus directeurs $c$, $c'$, $c''$ de la normale par les relations (17), d'où
'on déduit immédiatement

$$\lambda = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2. \tag{22}$$

En substituant $c$, $c'$, $c''$ à $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ on peut encore écrire les
:quations (B) sous la forme

$$\text{(B')}\quad \left\{ \begin{aligned} dx &= \lambda\left(c'\frac{\partial c''}{\partial \alpha} - c''\frac{\partial c'}{\partial \alpha}\right)d\alpha - \lambda\left(c'\frac{\partial c''}{\partial \beta} - c''\frac{\partial c'}{\partial \beta}\right)d\beta, \\ dy &= \lambda\left(c''\frac{\partial c}{\partial \alpha} - c\frac{\partial c''}{\partial \alpha}\right)d\alpha - \lambda\left(c''\frac{\partial c}{\partial \beta} - c\frac{\partial c''}{\partial \beta}\right)d\beta, \\ dz &= \lambda\left(c\frac{\partial c'}{\partial \alpha} - c'\frac{\partial c}{\partial \alpha}\right)d\alpha - \lambda\left(c\frac{dc'}{\partial \beta} - c'\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)d\beta, \end{aligned} \right.$$

qui, d'ailleurs, se déduit immédiatement des formules (16) où l'on
remplacera $\mu$ par $-\lambda$. La comparaison des formules précédentes
avec celles que nous avons données d'après Gauss au Livre VII,
Chapitre III III, p. 242 et suiv.], permet de faire une étude
approfondie de la surface rapportée à ses lignes asymptotiques.

Si l'on pose

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial c}{\partial \alpha}\right)^2 = e, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial c}{\partial \alpha}\frac{\partial c}{\partial \beta} = f, \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial c}{\partial \beta}\right)^2 = g, \tag{23}$$

on verra aisément que l'on a

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 = \lambda^2 e, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} = -\lambda^2 f. \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 = \lambda^2 g, \tag{23'}$$

et l'on pourra appliquer toutes les formules du Livre VII, Chapitre III, en y remplaçant $u$ et $v$ par $\alpha$ et $\beta$, puis faisant les substitutions suivantes

$$\mathrm{H} = -\lambda^2\Delta, \qquad \mathrm{D} = 0, \qquad \mathrm{D}' = \lambda^3\Delta^2, \qquad \mathrm{D}'' = 0; \tag{24}$$

$\Delta$ désignant le déterminant

$$\Delta = \sum \pm c\frac{\partial c'}{\partial \alpha}\frac{\partial c''}{\partial \beta}, \tag{25}$$

dont le carré a pour valeur

$$(25)' \qquad \Delta^2 = eg - f^2.$$

On trouvera, par exemple, que l'équation différentielle des lignes de courbure prend ici la forme

$$(26) \qquad e\, d\alpha^2 = g\, d\beta^2,$$

et que l'équation aux rayons de courbure principaux devient

$$(26)' \qquad R^2 - \frac{2f\lambda}{\Delta} R - \lambda^2 = 0.$$

*Et de là résulte la signification géométrique de* $\lambda$ : on a

$$(27) \qquad \lambda^2 = -RR',$$

R et R′ désignant les rayons de courbure principaux.

L'élément linéaire $d\sigma$ de la représentation sphérique et celui $ds$ de la surface sont déterminés par les deux formules

$$(28) \qquad \begin{cases} d\sigma^2 = \phantom{\lambda^2(} e\, d\alpha^2 + g\, d\beta^2 + 2f\, d\alpha\, d\beta, \\ ds^2 = \lambda^2(e\, d\alpha^2 + g\, d\beta^2 - 2f\, d\alpha\, d\beta), \end{cases}$$

dont la comparaison met en évidence le théorème d'Enneper [II, p. 399]. Pour chacune des lignes asymptotiques, la torsion $\frac{d\sigma}{ds}$ a la même valeur $\frac{1}{\lambda}$ égale à $\sqrt{\frac{-1}{RR'}}$.

**874.** Attachons-nous plus particulièrement à la représentation sphérique.

Nous établirons d'abord une relation différentielle entre $e, f, g$ qui montre que *la représentation sphérique des lignes asymptotiques ne peut être choisie arbitrairement*. Écrivons en effet que $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ ou $c\sqrt{\lambda}$, $c'\sqrt{\lambda}$, $c''\sqrt{\lambda}$ sont des solutions particulières de l'équation (D), nous aurons des relations telles que la suivante

$$(29) \qquad \frac{\partial^2(c\sqrt{\lambda})}{\partial\alpha\,\partial\beta} = kc\sqrt{\lambda},$$

ou, en développant,

$$(30) \qquad 2\lambda\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\frac{\partial c}{\partial\beta} + 2c\sqrt{\lambda}\left(\frac{\partial^2\sqrt{\lambda}}{\partial\alpha\,\partial\beta} - k\sqrt{\lambda}\right) = 0.$$

Multiplions cette équation par $c$ et ajoutons-la aux équations )tenues en y remplaçant $c$ par $c'$, $c''$, nous aurons une relation

$$\text{ı)}\qquad \frac{\partial^2(\sqrt{\lambda})}{\partial\alpha\,\partial\beta} = (k+f)\sqrt{\lambda},$$

ui fera connaître $k$ en fonction de $\lambda$ et dont nous ne ferons pas sage pour le moment. Mais, si l'on multiplie l'équation (30) soit ar $\frac{\partial c}{\partial\alpha}$, soit par $\frac{\partial c}{\partial\beta}$, et qu'on l'ajoute ensuite aux deux équations mblables obtenues en remplaçant $c$ par $c'$ et $c''$, il viendra les eux relations

$$\text{}2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda\frac{\partial e}{\partial\beta} + f\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} + e\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0.\\ &\lambda\frac{\partial g}{\partial\alpha} + f\frac{\partial\lambda}{\partial\beta} + g\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = 0,\end{aligned}\right.$$

'où l'on tire

$$\text{}3)\qquad \frac{\partial\log\lambda}{\partial\alpha} = \frac{f\frac{\partial e}{\partial\beta} - e\frac{\partial g}{\partial\alpha}}{eg-f^2}, \qquad \frac{\partial\log\lambda}{\partial\beta} = \frac{f\frac{\partial g}{\partial\alpha} - g\frac{\partial e}{\partial\beta}}{eg-f^2}.$$

Il faut donc que l'on ait

$$\text{}4)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{f\frac{\partial e}{\partial\beta} - e\frac{\partial g}{\partial\alpha}}{eg-f^2}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{f\frac{\partial g}{\partial\alpha} - g\frac{\partial e}{\partial\beta}}{eg-f^2}\right),$$

t il est évident que cette relation ([1]) n'est pas vérifiée quand la reésentation sphérique a été choisie arbitrairement. Par exemple i $f$ est nul, c'est-à-dire si les lignes asymptotiques sont supposées ectangulaires, elle prend la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(\log\frac{e}{g}\right) = 0,$$

t montre que le système orthogonal qui sert de représentation phérique aux lignes asymptotiques doit être isotherme. C'est une ıropriété connue des surfaces minima [I, p. 303].

---

([1]) Cette relation différentielle a été donnée pour la première fois par M. DINI ans un Mémoire qui est intitulé : *Sopra alcune formole generali della teoria lelle superficie, e loro applicazioni* (*Annali di Matematica*, série II, t. IV; ., 183) et a déjà été cité [III, p. 379].

**875.** Réciproquement, lorsque la condition (34) est vérifiée, les courbes sphériques de paramètres $\alpha$ et $\beta$ sont la représentation sphérique des lignes asymptotiques d'une série de surfaces, toutes homothétiques à l'une quelconque d'entre elles. Pour le montrer, nous nous appuierons sur la remarque suivante.

Lorsqu'on connaît un élément linéaire de la sphère de rayon 1 défini par la formule

$$d\sigma^2 = e\,d\alpha^2 + 2f\,d\alpha\,d\beta + g\,d\beta^2,$$

les coordonnées $c$, $c'$, $c''$ du point de paramètres $\alpha$ et $\beta$ satisfont toujours à une équation linéaire de la forme suivante

$$(35)\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + h'\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} + k'\frac{\partial\zeta}{\partial\beta} + l'\zeta = 0;$$

car cette équation contient trois fonctions arbitraires $h'$, $k'$, $l'$ dont on peut disposer de telle manière qu'elle admette trois solutions quelconques données à l'avance, et, en particulier, $c$, $c'$, $c''$. Cela posé, je dis qu'on peut toujours exprimer $h'$, $k'$, $l'$ en fonction de l'élément linéaire, c'est-à-dire de $e$, $f$, $g$ et de leurs dérivées. En effet, si nous opérons comme nous l'avons fait plus haut, si nous multiplions l'équation (35) successivement par $\zeta$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}$ et si nous ajoutons chaque fois les équations semblables obtenues en y remplaçant $\zeta$ par $c$, $c'$, $c''$, il viendra les trois relations

$$(36)\qquad \begin{cases} l' = f, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial e}{\partial\beta} + h'e + k'f = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial\alpha} + h'f + k'g = 0, \end{cases}$$

qui établissent le résultat annoncé.

Or, si la condition (34) est vérifiée, il existera une fonction $\lambda$ vérifiant les équations (33) ou les équations équivalentes (32); par suite, les deux dernières équations (36) nous donneront

$$h' = \frac{1}{2}\frac{\partial\log\lambda}{\partial\beta}, \qquad k' = \frac{1}{2}\frac{\partial\log\lambda}{\partial\alpha},$$

de sorte que l'équation aux dérivées partielles (35) *aura ses inva-*

*ınts égaux* et pourra prendre la forme

$$)\qquad \frac{\partial^2(\zeta\sqrt{\lambda})}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\zeta\sqrt{\lambda}.$$

Dès lors, les formules (B′) seront intégrables et nous donneront e surface admettant pour ses lignes asymptotiques la représenion sphérique donnée. Comme $\lambda$ n'est déterminé qu'à un facır constant près, on pourra remplacer cette surface par l'une elconque des surfaces homothétiques.

Il résulte de cette analyse que, *dans le cas où l'on a pris mme variables les paramètres des lignes asymptotiques, et ıns ce cas seulement, l'équation aux dérivées partielles de la rme* (35) *à laquelle satisfont les cosinus directeurs de la ›rmale a ses invariants égaux.*

M. Kœnigs a donné une forme plus géométrique encore à cet oncé (¹).

$c$, $c'$, $c''$, $o$ sont les coordonnées homogènes du point où la ›rmale coupe le plan de l'infini. On peut donc dire que *les aces sur le plan de l'infini des surfaces réglées engendrées ır les normales à la surface en tous les points des différentes gnes asymptotiques forment un réseau plan* (*nécessairement ·njugué comme tous les réseaux plans*) *à invariants égaux*.

Car l'équation ponctuelle [I, p. 122] relative à ce réseau congué est précisément l'équation (35). En transformant par poires réciproques, relativement à une sphère quelconque, et rearquant que les lignes asymptotiques se conservent dans cette ansformation, on voit que :

*Les perspectives des lignes asymptotiques sur le plan de l'inni forment un réseau à invariants égaux.*

**876.** La définition des lignes asymptotiques étant projective, la ·oposition particulière que nous venons d'établir entraîne immédiatement la suivante, comme l'a remarqué M. Kœnigs :

---

(¹) G. Kœnigs, *Sur les réseaux plans à invariants égaux et les lignes ·ymptotiques* (*Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences*, CXIV, p. 55; 1892).

875. Réciproquement, lorsque la condition (34) est vérifiée, les courbes sphériques de paramètres $\alpha$ et $\beta$ sont la représentation sphérique des lignes asymptotiques d'une série de surfaces, toutes homothétiques à l'une quelconque d'entre elles. Pour le montrer, nous nous appuierons sur la remarque suivante.

Lorsqu'on connaît un élément linéaire de la sphère de rayon 1 défini par la formule

$$d\sigma^2 = e\,d\alpha^2 + 2f\,d\alpha\,d\beta + g\,d\beta^2,$$

les coordonnées $c$, $c'$, $c''$ du point de paramètres $\alpha$ et $\beta$ satisfont toujours à une équation linéaire de la forme suivante

$$(35)\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + h'\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} + k'\frac{\partial\zeta}{\partial\beta} + l'\zeta = 0;$$

car cette équation contient trois fonctions arbitraires $h'$, $k'$, $l'$ dont on peut disposer de telle manière qu'elle admette trois solutions quelconques données à l'avance, et, en particulier, $c$, $c'$, $c''$. Cela posé, je dis qu'on peut toujours exprimer $h'$, $k'$, $l'$ en fonction de l'élément linéaire, c'est-à-dire de $e$, $f$, $g$ et de leurs dérivées. En effet, si nous opérons comme nous l'avons fait plus haut, si nous multiplions l'équation (35) successivement par $\zeta$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}$ et si nous ajoutons chaque fois les équations semblables obtenues en y remplaçant $\zeta$ par $c$, $c'$, $c''$, il viendra les trois relations

$$(36)\qquad \begin{cases} l' = f, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial e}{\partial\beta} + h'e + k'f = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial\alpha} + h'f + k'g = 0, \end{cases}$$

qui établissent le résultat annoncé.

Or, si la condition (34) est vérifiée, il existera une fonction $\lambda$ vérifiant les équations (33) ou les équations équivalentes (32); par suite, les deux dernières équations (36) nous donneront

$$h' = \frac{1}{2}\frac{\partial\log\lambda}{\partial\beta}, \qquad k' = \frac{1}{2}\frac{\partial\log\lambda}{\partial\alpha},$$

de sorte que l'équation aux dérivées partielles (35) *aura ses inva-*

*riants égaux* et pourra prendre la forme

$$\frac{\partial^2(\zeta\sqrt{\lambda})}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\zeta\sqrt{\lambda}. \tag{37}$$

Dès lors, les formules (B′) seront intégrables et nous donneront une surface admettant pour ses lignes asymptotiques la représentation sphérique donnée. Comme $\lambda$ n'est déterminé qu'à un facteur constant près, on pourra remplacer cette surface par l'une quelconque des surfaces homothétiques.

Il résulte de cette analyse que, *dans le cas où l'on a pris comme variables les paramètres des lignes asymptotiques, et dans ce cas seulement, l'équation aux dérivées partielles de la forme* (35) *à laquelle satisfont les cosinus directeurs de la normale a ses invariants égaux.*

M. Kœnigs a donné une forme plus géométrique encore à cet énoncé (¹).

$c$, $c'$, $c''$, $o$ sont les coordonnées homogènes du point où la normale coupe le plan de l'infini. On peut donc dire que *les traces sur le plan de l'infini des surfaces réglées engendrées par les normales à la surface en tous les points des différentes lignes asymptotiques forment un réseau plan* (*nécessairement conjugué comme tous les réseaux plans*) *à invariants égaux.*

Car l'équation ponctuelle [I, p. 122] relative à ce réseau conjugué est précisément l'équation (35). En transformant par polaires réciproques, relativement à une sphère quelconque, et remarquant que les lignes asymptotiques se conservent dans cette transformation, on voit que :

*Les perspectives des lignes asymptotiques sur le plan de l'infini forment un réseau à invariants égaux.*

**876.** La définition des lignes asymptotiques étant projective, la proposition particulière que nous venons d'établir entraîne immédiatement la suivante, comme l'a remarqué M. Kœnigs :

---

(¹) G. Kœnigs, *Sur les réseaux plans à invariants égaux et les lignes asymptotiques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXIV, p. 55; 1892).

*Les perspectives ou les projections des lignes asymptotiques sur un plan quelconque forment un réseau à invariants égaux.*

Nous allons vérifier cette proposition en démontrant que l'équation aux dérivées partielles (22) [p. 18] à laquelle conduit notre première solution a ses invariants égaux. Cette équation, à laquelle satisfont les coordonnées $x$, $y$ d'un point de la surface (S), est bien celle qui caractérise le réseau formé par la projection des lignes asymptotiques de la surface (S) sur le plan des $xy$.

Or, si l'on se reporte aux expressions de $x$ et de $y$ données par les formules (B), on reconnaît immédiatement que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\theta_3^2}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\theta_3^2}\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\theta_3^2}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\theta_3^2}\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)=0.$$

Par conséquent, $x$ et $y$ seront des solutions particulières de l'équation en $\theta'$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\theta_3^2}\frac{\partial\theta'}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\theta_3^2}\frac{\partial\theta'}{\partial\beta}\right)=0,$$

dont les invariants sont égaux; car son développement lui donne la forme

$$\frac{\partial^2\theta'}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{1}{\theta_3}\frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\frac{\partial\theta'}{\partial\alpha}-\frac{1}{\theta_3}\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\frac{\partial\theta'}{\partial\beta}=0. \tag{38}$$

Cette équation n'est autre que celle qu'il s'agissait de former au n° 866; et ainsi se trouve mis en évidence le lien entre notre première et notre seconde solution.

877. La remarque que nous venons de faire nous amène à compléter une proposition géométrique très élégante, signalée par M. Kœnigs et relative aux réseaux plans conjugués dont les invariants sont égaux. Nous allons mettre en évidence une propriété caractéristique des réseaux conjugués tracés sur une surface quelconque, et auxquels correspond une équation linéaire dont les deux invariants sont égaux.

Soit

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+a\frac{\partial\theta}{\partial u}+b\frac{\partial\theta}{\partial v}=0 \tag{39}$$

l'équation ponctuelle relative à un système conjugué, tracé sur une surface (S), c'est-à-dire l'équation à laquelle satisfont les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque M de cette surface, considérées comme fonctions des variables $u$ et $v$. Les tangentes aux courbes de paramètre $u$ engendrent une congruence qui admet (S) pour une des nappes de sa surface focale. Le point $M_1$ de l'autre nappe sera, comme on sait, défini par les formules

$$(40) \qquad x_1 = x + \frac{1}{a}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad y_1 = y + \frac{1}{a}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad z_1 = z + \frac{1}{a}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Si l'on considère de même la congruence engendrée par les tangentes aux courbes de paramètre $v$, le second point focal $M_2$ de la tangente en M à la courbe qui passe en ce même point sera, de même, défini par les formules

$$(41) \qquad x_2 = x + \frac{1}{b}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad y_2 = y + \frac{1}{b}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad z_2 = z + \frac{1}{b}\frac{\partial z}{\partial u};$$

de sorte que l'on peut exprimer $a$ et $b$ par des formules telles que les suivantes

$$(42) \qquad a = \frac{1}{x_1 - x}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad b = \frac{1}{x_2 - x}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

D'autre part, en différentiant la première équation (40) et tenant compte de ce que $x$ est solution particulière de l'équation (39), on trouvera

$$(43) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = -\frac{h}{a^2}\frac{\partial x}{\partial v},$$

$h$ désignant le premier *invariant* de l'équation (39). On a donc, en éliminant $a$ entre les équations (42) et (43),

$$(44) \qquad h = -\frac{\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial x_1}{\partial u}}{(x - x_1)^2}.$$

Comme il est permis d'écrire des équations analogues en $y$ et $z$, on est conduit à l'expression

$$(45) \qquad h = -\frac{\dfrac{\partial x_1}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y_1}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z_1}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

qui est moins simple, mais devient indépendante du choix des axes. On peut l'interpréter géométriquement. Mais, pour éviter toute difficulté quant aux signes, nous raisonnerons de la manière suivante.

878. Lorsque $u$ varie, le point $M_1$ décrit une courbe tangente à $MM_1$ et dont le plan osculateur est, comme on sait, le plan tangent en M à la surface, c'est-à-dire le plan $MM_1M_2$. Soient, pour le point $M_1$, A, A′, A″; B, B′, B″; C, C′, C″ les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe, de sa normale principale et de la normale au plan osculateur. Cette dernière normale étant parallèle à la normale à la surface, nous pourrons prendre, en conservant toutes les notations du Chapitre III, Livre VII [III, p. 242 et suiv.],

$$(46)\qquad C = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

On aura évidemment

$$(47)\qquad A = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v},\qquad A' = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v},\qquad A'' = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

De là on déduira B, B′, B″ par les formules connues

$$B = C'A'' - A'C'',\qquad \ldots,$$

qui nous donnent, par la substitution,

$$(48)\qquad B = \frac{F\dfrac{\partial x}{\partial v} - G\dfrac{\partial x}{\partial u}}{H\sqrt{G}},\qquad B' = \frac{F\dfrac{\partial y}{\partial v} - G\dfrac{\partial y}{\partial u}}{H\sqrt{G}},\qquad B'' = \frac{F\dfrac{\partial z}{\partial v} - G\dfrac{\partial z}{\partial u}}{H\sqrt{G}}.$$

Désignons par $ds_1$ l'arc de la courbe décrite par le point $M_1$. On a, d'après l'équation (43),

$$(49)\qquad ds_1 = \frac{h}{a^2}\sqrt{G}\,du;$$

et, d'autre part, les formules fondamentales relatives aux courbes gauches [I, p. 10] nous donnent

$$\frac{dA}{ds_1} = \frac{B}{\rho_1}\qquad\text{ou}\qquad \frac{\partial A}{\partial u} = \frac{B}{\rho_1}\frac{ds_1}{du},$$

$\rho_1$ étant le rayon de courbure de la courbe. On a donc

(50) $$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{B}{\rho_1}\frac{h}{a^2}\sqrt{G},$$

ou, en remplaçant A et B par leurs valeurs (47), (48) et tenant compte de l'équation (39),

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\left(-a\frac{\partial x}{\partial u} - b\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{1}{2G\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{h}{a^2\rho_1}\sqrt{G}\left(\frac{F\frac{\partial x}{\partial v} - G\frac{\partial x}{\partial u}}{H\sqrt{G}}\right).$$

Égalant les coefficients de $\frac{\partial x}{\partial u}$ dans les deux membres, on trouve

(51) $$\frac{a}{\sqrt{G}} = \frac{Gh}{a^2 H \rho_1}.$$

Or, si $\overline{MM_1}$ désigne en grandeur et en signe la distance $MM_1$, on a

$$x_1 - x = A \times \overline{MM_1}.$$

En remplaçant A et $x_1 - x$ par leurs valeurs (47) et (40), on trouve

$$\frac{\sqrt{G}}{a} = \overline{MM_1},$$

ce qui permet d'écrire l'équation (51) sous la forme entièrement géométrique

(52) $$h = \frac{H\rho_1}{\overline{MM_1}^3}.$$

Pour la courbe décrite par le point $M_2$, on trouverait de même

(53) $$k = -\frac{H\rho_2}{\overline{MM_2}^3},$$

$k$ désignant le second invariant de l'équation (39).

Ces expressions des deux invariants nous permettent de résoudre la question proposée. Pour qu'ils deviennent égaux, il faut que l'on ait

(54) $$\frac{\rho_1}{\overline{MM_1}^3} + \frac{\rho_2}{\overline{MM_2}^3} = 0.$$

Or on sait que la relation précédente existe entre les rayons de courbure, en $M_1$ et $M_2$, de toute conique qui serait tangente en

ces points aux droites $MM_1$, $MM_2$, c'est-à-dire aux courbes décrites par les points $M_1$ et $M_2$. Par suite, celle de ces coniques qui aura en $M_1$ le rayon de courbure $\rho_1$ aura en $M_2$ le rayon de courbure $\rho_2$. Comme les plans osculateurs aux deux courbes en $M_1$ et en $M_2$ se confondent avec le plan $MM_1M_2$, on peut énoncer la proposition suivante, généralisation de celle que M. Kœnigs a fait connaître pour les réseaux plans dans la Communication citée plus haut :

*Pour que l'équation ponctuelle relative à un système conjugué tracé sur une surface quelconque ait ses invariants égaux, il faut et il suffit que, si l'on construit les deux développables circonscrites à la surface suivant les deux courbes du système conjugué qui se croisent en un quelconque de ses points et que l'on prenne sur chacune de ces développables les points de contact de trois génératrices consécutives avec l'arête de rebroussement, les six points focaux ainsi obtenus appartiennent à une même conique.*

En transformant par polaires réciproques, on voit de même que :

*Pour que l'équation tangentielle relative à un système conjugué ait ses invariants égaux, il faut et il suffit que les trois plans focaux, distincts des plans tangents à la surface, relatifs à trois tangentes consécutives prises sur chacune des deux courbes du système conjugué qui se croisent en un même point quelconque de la surface, soient six plans tangents d'un même cône du second degré.*

879. Pour indiquer dès à présent au moins une application des formules de M. Lelieuvre, supposons que la surface proposée (S) ait sa courbure constante et égale à $-1$. Il faudra faire $\lambda = 1$, et l'on voit que $c$, $c'$, $c''$ satisferont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = k\theta. \tag{55}$$

Ainsi, toutes les fois qu'une équation de la forme précédente admettra trois solutions vérifiant la relation

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$

elles fourniront une surface à courbure constante.

D'autre part, les équations (32) nous donnent alors

(56) $$\frac{\partial e}{\partial \beta} = \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$e = f(\alpha), \qquad g = f_1(\beta).$$

Écartons le cas où l'une des quantités $e$, $g$ serait nulle, qui nous conduirait seulement à la sphère et aux surfaces réglées imaginaires applicables sur la sphère. On pourra dès lors, en choisissant convenablement les paramètres, réduire $e$ et $g$ à l'unité; de sorte que l'on aura, en posant $f = -\cos 2\omega$, les formules suivantes

(57) $$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 - 2\cos 2\omega\, d\alpha\, d\beta,$$

(58) $$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2\cos 2\omega\, d\alpha\, d\beta,$$

qui sont d'accord avec celles du n° 772 [III, p. 379]. Pour obtenir l'équation à laquelle doit satisfaire $\omega$, il suffit d'exprimer que la sphère a une courbure totale égale à 1, ce qui donne

(59) $$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \sin\omega \cos\omega.$$

Comme on a ici, en vertu de l'équation (31),

(60) $$k = -f = \cos 2\omega,$$

l'équation (19) en $\theta$ deviendra

(61) $$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \theta \cos 2\omega.$$

Telle est l'équation qu'il faudra intégrer si l'on veut résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour la surface à courbure constante donnée.

**880.** Le lecteur se rappelle la longue étude que nous avons consacrée à l'équation aux dérivées partielles (59). Nous avons vu [III, p. 432] que, si l'on considère le système

(62) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \sin(\omega_1 - \omega), \\[2ex] \dfrac{\partial \omega_1}{\partial \beta} - \dfrac{\partial \omega}{\partial \beta} = \sin(\omega_1 + \omega), \end{cases}$$

il permet de déduire de toute solution $\omega$ de l'équation (59) une solution $\omega_1$ qui contiendra une constante arbitraire et vérifiera encore la même équation (59). Nous allons montrer d'abord que, si l'on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour la surface à courbure constante correspondante à la solution $\omega$, on saura résoudre le même problème pour la surface correspondante à la solution $\omega_1$, c'est-à-dire pour celle qui dérive la première par la substitution de M. Bianchi. En d'autres termes ([1]), *si l'on sait résoudre l'équation* (61) *correspondante à la fonction* $\omega$, *on saura résoudre cette même équation où* $\omega$ *serait remplacée par* $\omega_1$.

Remplaçons, en effet, dans les formules (62), $\omega$ et $\omega_1$ respectivement par $\omega + \theta$ et $\omega_1 + \theta_1$; et, développant les deux membres des équations suivant les puissances de $\theta$ et de $\theta_1$, bornons-nous à conserver les termes du premier degré en $\theta$ et $\theta_1$. Nous serons conduit aux deux équations linéaires

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} &= (\theta_1 - \theta)\cos(\omega_1 - \omega),\\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta} - \frac{\partial\theta}{\partial\beta} &= (\theta_1 + \theta)\cos(\omega_1 + \omega).\end{aligned}\right.$$

Éliminons $\theta_1$ entre ces deux équations : en égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ qu'elles peuvent fournir, nous aurons

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \theta\cos 2\omega,$$

c'est-à-dire l'équation (61). Si l'on éliminait de même $\theta$, on trouverait

$$(64)\qquad \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \theta_1\cos 2\omega_1,$$

---

([1]) M. C. Guichard est le premier qui ait étudié les équations aux dérivées partielles de la forme (61). *Voir* le Mémoire intitulé : *Sur une classe particulière d'équations aux dérivées partielles dont les invariants sont égaux* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. VII, p. 19; 1890), ainsi que celui qui a paru au même Recueil et au même tome (p. 233) sous le titre : *Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent.*

c'est-à-dire l'équation (61) où $\omega$ serait remplacé par $\omega_1$. Comme d'ailleurs on peut toujours, lorsque $\theta$ est donné, déduire, par de simples quadratures, la valeur de $\theta_1$ vérifiant les deux équations (63), on voit que toute solution de l'équation (61) fournira, avec une constante arbitraire, une solution de l'équation (64). On peut donc énoncer la proposition suivante :

*Lorsqu'on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une surface à courbure constante, on sait le résoudre aussi pour toutes celles qu'on en dérive par la transformation de M. Bianchi.*

Ce résultat était évident par la Géométrie. Il nous a paru bon de le mettre en lumière. On comprend ainsi comment le problème de la déformation infiniment petite doit dépendre de l'équation (61). Car, si l'on considère une surface à courbure constante infiniment voisine de la surface proposée (S), $\omega$ sera, pour cette surface, remplacée par une fonction $\omega + \theta$ infiniment peu différente de $\omega$. En substituant $\omega + \theta$ à la place de $\omega$ dans l'équation (59) et se bornant aux termes du premier degré en $\theta$, on retrouve bien l'équation (61) ([1]).

De la remarque que nous venons de faire, on peut déduire immédiatement trois solutions particulières de l'équation linéaire (61). Soit, en effet,

$$\omega = \varphi(\alpha, \beta).$$

Nous avons vu que, si $\alpha_0$, $\beta_0$, $m$ sont trois constantes,

$$\omega' = \varphi\left[(1+m)\alpha + \alpha_0, \frac{\beta}{1+m} + \beta_0\right]$$

sera encore une solution de l'équation (59). En développant suivant les puissances de ces constantes, on aura

$$\omega' = \omega + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\alpha_0 + \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\beta_0 + \left(\alpha\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \beta\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)m + \ldots;$$

d'où l'on voit, en se bornant aux termes du premier degré, qu'en

---

([1]) La proposition précédente s'applique aussi aux transformations de MM. Lie et Bäcklund.

prenant pour $\theta$ une des trois fonctions

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\beta}, \quad \alpha\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \beta\frac{\partial\omega}{\partial\beta},$$

on aura une solution de l'équation (61).

881. Nous terminerons ce Chapitre en indiquant comment on peut obtenir des formules analogues à celles de M. Lelieuvre quand les variables indépendantes auront été choisies d'une manière quelconque.

Soient $u$ et $v$ ces variables et conservons toutes les notations du Livre VII, Chapitre III [III, p. 242 et suiv.]. On peut toujours déterminer des coefficients A, A' tels que l'on ait

$$(65)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{A}'\left(c'\frac{\partial c''}{\partial u} - c''\frac{\partial c'}{\partial u}\right) - \mathrm{A}\left(c'\frac{\partial c''}{\partial v} - c''\frac{\partial c'}{\partial v}\right),$$

et les formules analogues obtenues en soumettant $x, y, z$; $c, c', c''$ à une permutation circulaire. La multiplication de deux déterminants nous conduit d'ailleurs à l'identité

$$(66)\qquad \begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ \frac{\partial c}{\partial u} & \frac{\partial c'}{\partial u} & \frac{\partial c''}{\partial u} \\ \frac{\partial c}{\partial v} & \frac{\partial c'}{\partial v} & \frac{\partial c''}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\mathrm{D}}{\mathrm{H}} & \frac{-\mathrm{D}'}{\mathrm{H}} \\ 0 & \frac{-\mathrm{D}'}{\mathrm{H}} & \frac{-\mathrm{D}''}{\mathrm{H}} \end{vmatrix};$$

c'est-à-dire, en tenant compte des formules (4) [III, p. 243],

$$(67)\qquad \begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ \frac{\partial c}{\partial u} & \frac{\partial c'}{\partial u} & \frac{\partial c''}{\partial u} \\ \frac{\partial c}{\partial v} & \frac{\partial c'}{\partial v} & \frac{\partial c''}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2}{\mathrm{H}^3}.$$

Cela posé, multiplions l'équation (65) par $\frac{\partial c}{\partial u}$ et ajoutons-la aux deux équations qu'elle donne par une permutation circulaire. Nous trouverons, en tenant compte de la relation (67),

$$(68)\qquad \mathrm{A} = \frac{\mathrm{DH}^2}{\mathrm{D}'^2 - \mathrm{DD}''}.$$

En calculant de même la valeur de A', on trouvera

$$(69)\qquad A' = \frac{D'H^2}{D'^2 - DD''}.$$

Si l'on échange enfin $u$ et $v$ dans la formule (65), on pourra écrire

$$(70)\qquad \frac{\partial x}{\partial v} = A''\left(c'\frac{\partial c''}{\partial u} - c''\frac{\partial c'}{\partial u}\right) - A'\left(c'\frac{\partial c''}{\partial v} - c''\frac{\partial c'}{\partial v}\right),$$

et les formules analogues en $y$ et $z$; A'' ayant pour valeur

$$(71)\qquad A'' = \frac{D''H^2}{D'^2 - DD''}.$$

Si l'on suppose que $u$ et $v$ soient les paramètres des lignes asymptotiques, A, A'' deviennent nuls et l'on retrouve les formules (B') données plus haut.

Effectuons dans les formules (65) et (70) la substitution définie par les équations

$$(72)\qquad c\sqrt{\lambda} = \theta_1, \qquad c'\sqrt{\lambda} = \theta_2, \qquad c''\sqrt{\lambda} = \theta_3,$$

elles se changeront dans les suivantes

$$(73)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = B'\left(\theta_2\dfrac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3\dfrac{\partial \theta_2}{\partial u}\right) - B\left(\theta_2\dfrac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3\dfrac{\partial \theta_2}{\partial v}\right), \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = B''\left(\theta_2\dfrac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3\dfrac{\partial \theta_2}{\partial u}\right) - B'\left(\theta_2\dfrac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3\dfrac{\partial \theta_2}{\partial v}\right), \end{cases}$$

où l'on aura

$$(74)\qquad B = \frac{A}{\lambda}, \qquad B' = \frac{A'}{\lambda}, \qquad B'' = \frac{A''}{\lambda}.$$

Les dérivées de $y$ et de $z$ s'obtiendront par des permutations effectuées sur $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, de sorte que la surface sera définie par les formules suivantes

$$(B'')\qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int \left(\theta_2\frac{\partial \theta_3}{\partial u} - \theta_3\frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right)(B'\,du + B''\,dv) - \left(\theta_2\frac{\partial \theta_3}{\partial v} - \theta_3\frac{\partial \theta_2}{\partial v}\right)(B\,du + B'\,dv). \\ y = \displaystyle\int \left(\theta_3\frac{\partial \theta_1}{\partial u} - \theta_1\frac{\partial \theta_3}{\partial u}\right)(B'\,du + B''\,dv) - \left(\theta_3\frac{\partial \theta_1}{\partial v} - \theta_1\frac{\partial \theta_3}{\partial v}\right)(B\,du + B'\,dv), \\ z = \displaystyle\int \left(\theta_1\frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2\frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right)(B'\,du + B''\,dv) - \left(\theta_1\frac{\partial \theta_2}{\partial v} - \theta_2\frac{\partial \theta_1}{\partial v}\right)(B\,du + B'\,dv). \end{cases}$$

Si nous déterminons $\lambda$ en particulier par la condition

$$B'^2 - BB'' = 1, \tag{75}$$

qui donne

$$\lambda^2 = A'^2 - AA'',$$

ou, en substituant les valeurs de A, A′, A″

$$\lambda^2 = \frac{H^4}{D'^2 - DD''} = -RR', \qquad \lambda = \sqrt{-RR'}, \tag{76}$$

$\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ seront identiques aux quantités de même détermination qui figurent dans les formules (B). Mais, *sans fixer dès à présent la valeur de* $\lambda$, exprimons que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ obtenues par la différentiation des deux équations (73) sont égales, nous serons conduits à la relation

$$\begin{aligned}&\theta_2 \frac{\partial}{\partial v}\left(B'\frac{\partial\theta_3}{\partial u} - B\frac{\partial\theta_3}{\partial v}\right) - \theta_3\frac{\partial}{\partial v}\left(B'\frac{\partial\theta_2}{\partial u} - B\frac{\partial\theta_2}{\partial v}\right)\\ &= \theta_2\frac{\partial}{\partial u}\left(B''\frac{\partial\theta_3}{\partial u} - B'\frac{\partial\theta_3}{\partial v}\right) - \theta_3\frac{\partial}{\partial u}\left(B''\frac{\partial\theta_2}{\partial u} - B'\frac{\partial\theta_2}{\partial v}\right);\end{aligned}$$

d'où il suit, en répétant le raisonnement employé au n° 870, que l'on peut trouver une certaine fonction K telle que $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ soient trois solutions particulières d'une équation de la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(B''\frac{\partial\theta}{\partial u} - B'\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(B\frac{\partial\theta}{\partial v} - B'\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) = K\theta. \tag{77}$$

La fonction K variera suivant la valeur de $\lambda$ que l'on aura choisie. Elle a une expression particulièrement simple lorsqu'on a pris $\lambda$ égal à l'unité, c'est-à-dire lorsque l'équation précédente admet $c$, $c'$, $c''$ comme solutions particulières. En effet, si, après l'avoir multipliée par $\theta$, l'on y remplace $\theta$ par $c$, $c'$, $c''$ successivement, en ajoutant les trois équations ainsi obtenues, on trouvera

$$K = A'' \mathrm{S}\, c\frac{\partial^2 c}{\partial u^2} - 2A' \mathrm{S}\, c\frac{\partial^2 c}{\partial u\,\partial v} + A \mathrm{S}\, c\frac{\partial^2 c}{\partial v^2},$$

ou encore

$$K = -A'' \mathrm{S}\left(\frac{\partial c}{\partial u}\right)^2 + 2A' \mathrm{S}\,\frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial v} - A \mathrm{S}\left(\frac{\partial c}{\partial v}\right)^2.$$

Les valeurs des trois sommes contenues dans cette relation se éduisent de la formule (32) [III, p. 249]. En les substituant insi que les valeurs de A, A′, A″, on trouve

$$(78)\qquad K = \frac{1}{H^2}(GD - 2FD' + ED'') = H\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

R et R′ désignant les rayons de courbure principaux (n° 701).

Remarquons que, dans tous les cas, l'équation (77) est celle que l'on obtiendrait en égalant à zéro la variation de l'intégrale double

$$(79)\qquad I = \iint \left[K\theta^2 + B''\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2B'\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + B\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2\right] du\, dv,$$

et que la surface $(S_1)$ correspondant à (S) avec orthogonalité des éléments linéaires se trouverait ici définie par la formule

$$\left\{\begin{aligned}
x_1 &= \int\left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial u} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)(B'\,du + B''\,dv) - \left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial v} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)(B\,du + B'\,dv),\\
y_1 &= \int\left(\theta_2\frac{\partial\omega}{\partial u} - \omega\frac{\partial\theta_2}{\partial u}\right)(B'\,du + B''\,dv) - \left(\theta_2\frac{\partial\omega}{\partial v} - \omega\frac{\partial\theta_2}{\partial v}\right)(B\,du + B'\,dv),\\
z_1 &= \int\left(\theta_3\frac{\partial\omega}{\partial u} - \omega\frac{\partial\theta_3}{\partial u}\right)(B'\,du + B''\,dv) - \left(\theta_3\frac{\partial\omega}{\partial v} - \omega\frac{\partial\theta_3}{\partial v}\right)(B\,du + B'\,dv),
\end{aligned}\right.$$

où $\omega$ serait une solution quelconque de l'équation (77).

Si $u$ et $v$ sont les paramètres des lignes asymptotiques, on a

$$B = B'' = 0.$$

Si, en outre, $\lambda$ est définie par la condition (76), on a

$$B'^2 = 1,$$

ce qui permet de prendre

$$B' = 1,$$

et l'on retrouve les formules (C) où $\alpha$ et $\beta$ seraient remplacées par $u$ et $v$.

Le lecteur pourra rapprocher les formules générales qui précèdent de celles qui se trouvent dans le Mémoire cité plus haut [p. 8] de M. Weingarten. Nous terminerons ce Chapitre en indiquant une démonstration de ces formules qui en fera sans doute mieux comprendre la véritable origine.

882. Désignons toujours par $c$, $c'$, $c''$ les cosinus directeurs de la normale, et employons les caractéristiques $d$ et $\delta$ pour définir les déplacements suivant deux directions conjuguées quelconques. On aura les deux équations

$$(80)\qquad \left\{\begin{aligned} c\,dx + c'\,dy + c''\,dz &= 0,\\ \delta c\,dx + \delta c'\,dy + \delta c''\,dz &= 0,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(81)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= h(c'\,\delta c'' - c''\,\delta c'),\\ dy &= h(c''\,\delta c - c\,\delta c''),\\ dz &= h(c\,\delta c' - c'\,\delta c),\end{aligned}\right.$$

$h$ étant une quantité finie. D'ailleurs, D, D', D'' ayant la même signification que plus haut, l'équation

$$\mathrm{D}\,du\,\delta u + \mathrm{D}'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{D}''\,dv\,\delta v = 0$$

ou

$$(\mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'dv)\,\delta u + (\mathrm{D}'\,du + \mathrm{D}''\,dv)\,\delta v = 0$$

exprimera que les deux directions définies par les caractéristiques $d$ et $\delta$ sont conjuguées. La relation précédente permet de poser

$$(82)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta u &= \mathrm{D}'\,du + \mathrm{D}''\,dv,\\ \delta v &= -\mathrm{D}\,du - \mathrm{D}'\,dv,\end{aligned}\right.$$

de sorte que les formules (81) nous donnent

$$\left\{\begin{aligned} dx &= h\left(c'\frac{\partial c''}{\partial u} - c''\frac{\partial c'}{\partial u}\right)(\mathrm{D}'\,du + \mathrm{D}''\,dv) - h\left(c'\frac{\partial c''}{v} - c''\frac{\partial c'}{\partial v}\right)(\mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'\,dv),\\ dy &= h\left(c''\frac{\partial c}{\partial u} - c\frac{\partial c''}{\partial u}\right)(\mathrm{D}'\,du + \mathrm{D}''\,dv) - h\left(c''\frac{\partial c}{\partial v} - c\frac{\partial c''}{\partial v}\right)(\mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'\,dv),\\ dz &= h\left(c\frac{\partial c'}{\partial u} - c'\frac{\partial c}{\partial u}\right)(\mathrm{D}'\,du + \mathrm{D}''\,dv) - h\left(c\frac{\partial c'}{\partial v} - c'\frac{\partial c}{\partial v}\right)(\mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'\,dv).\end{aligned}\right.$$

La formule (26) [III, p. 248] nous permettra d'ailleurs de déterminer $h$. On a ici, en vertu du système précédent,

$$\mathrm{S}\,dc\,dx = -h\begin{vmatrix} c & c' & c''\\ \dfrac{\partial c}{\partial u} & \dfrac{\partial c'}{\partial u} & \dfrac{\partial c''}{\partial u}\\ \dfrac{\partial c}{\partial v} & \dfrac{\partial c'}{\partial v} & \dfrac{\partial c''}{\partial v}\end{vmatrix}(\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2),$$

qui donne, en tenant compte de l'équation (67),

$$\frac{1}{-H} = h\frac{DD'' - D'^2}{H^3} \qquad \text{ou} \qquad h = \frac{-H^2}{DD'' - D'^2}.$$

Il ne reste plus qu'à substituer cette valeur de $h$ dans les for-
ules (83) pour obtenir l'équivalent des relations (B''), où $\theta_1$, $\theta_2$,
désigneraient $c$, $c'$, $c''$.

# CHAPITRE III.

## LES DOUZE SURFACES. DÉVELOPPEMENTS GÉOMÉTRIQUES SE RATTACHANT AUX PRÉCÉDENTES SOLUTIONS.

Étant données deux surfaces (S) et ($S_1$) qui se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, au réseau des lignes asymptotiques de chacune de ces surfaces correspond, sur l'autre, un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux. — On déduit du premier couple deux nouvelles surfaces ($\Sigma$) et (A) qui se correspondent, elles aussi, avec orthogonalité des éléments linéaires. — Définition de ($\Sigma$) : c'est l'enveloppe des plans menés par tous les points de (S) perpendiculairement aux directrices de la déformation. — On sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour ($\Sigma$) lorsqu'on sait résoudre ce problème pour (S). — Les lignes asymptotiques se correspondent sur (S) et sur ($\Sigma$). — Réciproque : théorème de M. Guichard. — Relation géométrique entre les deux nappes de la surface focale d'une congruence rectiligne, dans le cas où les lignes asymptotiques se correspondent sur ces deux nappes. — Propriétés qui rattachent la surface (A) à la surface ($S_1$) : les plans tangents aux points correspondants sont parallèles et le système conjugué commun a ses invariants ponctuels égaux, sur les deux surfaces. — Réciproque : théorèmes de MM. Kœnigs et Cosserat. — Les trois réseaux I, II, III formés par les lignes asymptotiques de (S), de ($S_1$) et de (A) sont harmoniques deux à deux. — Introduction de huit nouvelles surfaces qui, jointes aux quatre premières, forment un ensemble de douze surfaces que l'on peut grouper deux à deux de telle manière qu'elles se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, ou bien par plans tangents parallèles, ou bien par polaires réciproques relativement à une sphère concentrique à l'origine, ou enfin comme focales d'une même congruence rectiligne sur lesquelles les lignes asymptotiques se correspondent. — Sur chacune de ces douze surfaces, les trois réseaux I, II, III déjà signalés sont, l'un formé des lignes asymptotiques, l'autre conjugué à invariants ponctuels égaux, le dernier enfin conjugué à invariants tangentiels égaux. — Quand deux surfaces se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, le système conjugué commun a ses invariants tangentiels égaux. — Lorsque, sur une surface, un réseau conjugué a ses invariants ponctuels (ou tangentiels) égaux, le réseau conjugué qui lui est harmonique a ses invariants tangentiels (ou ponctuels) égaux.

---

883. Nous revenons au problème de la déformation infiniment petite pour développer les nombreuses propriétés géométriques que l'on peut rattacher à la solution développée dans le Chapitre

précédent. La surface (S) étant définie par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} x = \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta}\right) d\beta, \\ y = \int \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} - \theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta}\right) d\beta, \\ z = \int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta}\right) d\beta, \end{cases}$$

où $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sont des solutions d'une même équation aux dérivées partielles

$$(2)\quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = k\theta,$$

et sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à la surface (S), nous avons vu que les fonctions les plus générales $x_1$, $y_1$, $z_1$ vérifiant la relation

$$(3)\quad dx\, dx_1 + dy\, dy_1 + dz\, dz_1 = 0$$

sont déterminées par les formules suivantes

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = \int \left(\theta_1 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta}\right) d\beta, \\ y_1 = \int \left(\theta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta}\right) d\beta, \\ z_1 = \int \left(\theta_3 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \omega \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta}\right) d\beta, \end{cases}$$

où $\omega$ désigne la solution la plus générale de l'équation (2). Au n° 856 nous avons déjà établi l'existence d'un système de relations de la forme

$$(5)\quad \begin{cases} dx = c\, dy_1 - b\, dz_1, \\ dy = a\, dz_1 - c\, dx_1, \\ dz = b\, dx_1 - a\, dy_1, \end{cases}$$

entre les différentielles $dx$, $dy$, $dz$; $dx_1$, $dy_1$, $dz_1$. On déterminera sans peine les valeurs de $a$, $b$, $c$, qui sont

$$(6)\quad a = \frac{\theta_1}{\omega}, \qquad b = \frac{\theta_2}{\omega}, \qquad c = \frac{\theta_3}{\omega};$$

de sorte que les formules (4) sont équivalentes aux suivantes

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha} - \omega^2 \dfrac{\partial a}{\partial \alpha} = 0, & \dfrac{\partial y_1}{\partial \alpha} + \omega^2 \dfrac{\partial b}{\partial \alpha} = 0, & \dfrac{\partial z_1}{\partial \alpha} + \omega^2 \dfrac{\partial c}{\partial \alpha} = 0, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \beta} - \omega^2 \dfrac{\partial a}{\partial \beta} = 0, & \dfrac{\partial y_1}{\partial \beta} - \omega^2 \dfrac{\partial b}{\partial \beta} = 0, & \dfrac{\partial z_1}{\partial \beta} - \omega^2 \dfrac{\partial c}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

dont nous ferons plus d'une fois usage dans la suite.

Si nous éliminons $a$ entre les deux premières de ces équations, nous aurons

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial x_1}{\partial \beta}\right) = 0$$

ou, en développant,

$$(8)\quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial \alpha\, \partial \beta} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \beta}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\frac{\partial x_1}{\partial \beta} = 0.$$

Il est clair que $y_1$ et $z_1$ vérifient la même équation. Donc, sur la surface $(S_1)$, $\alpha$ et $\beta$ sont les paramètres d'un système conjugué et l'équation *ponctuelle* relative à ce système conjugué a ses invariants égaux. Ainsi :

*Quand deux surfaces* $(S)$ *et* $(S_1)$ *se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, au réseau des asymptotiques de l'une quelconque de ces surfaces correspond sur l'autre surface un système conjugué, et l'équation ponctuelle relative à ce système conjugué a ses invariants égaux.*

884. Réciproquement, supposons que l'on connaisse, sur une surface $(S_1)$, un système conjugué dont l'équation ponctuelle ait ses invariants égaux. Cette équation pourra toujours être mise sous la forme (8). Les formules (7) nous fourniront ensuite des fonctions $a$, $b$, $c$ par des quadratures telles que la suivante

$$(9)\quad a = -\int \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\,d\alpha - \frac{\partial x_1}{\partial \beta}\,d\beta\right).$$

Puis, les relations (6) nous feront connaître des fonctions $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$. Ces trois fonctions satisferont, on s'en assure aisément, à l'équation

$$(10)\quad \frac{1}{\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta};$$

par suite, en les substituant dans les formules (1), on obtiendra e surface (S) qui correspondra à ($S_1$) avec orthogonalité des élé- nts. On peut donc énoncer la proposition suivante :

*Si l'on connaît, sur une surface* ($S_1$), *un système conjugué nt l'équation ponctuelle ait ses invariants égaux, on pourra terminer, par de simples quadratures, une surface* (S) *cor- pondant à* ($S_1$) *avec orthogonalité des éléments linéaires et lignes asymptotiques de* (S) *correspondront aux deux fa- lles du réseau conjugué tracé sur* ($S_1$).

Il faut même remarquer que, comme les fonctions $a$, $b$, $c$ sont terminées par des quadratures, la solution contiendra trois nstantes arbitraires, et l'on pourra ajouter aux fonctions $\theta_1$, $\theta_2$, la fonction $\omega$ multipliée par des constantes quelconques. Cela vient, on s'en assure aisément, à composer les formules qui dé- minent (S) avec celles qui donnent un plan et qui correspondent, n plus à une déformation infiniment petite de ($S_1$), mais à un placement infiniment petit de cette surface (n° 856). On peut nc dire que :

*A chaque réseau conjugué à invariants égaux tracé sur une rface correspond une déformation infiniment petite parfaite- ent déterminée de cette surface.*

885. Revenons aux formules (5). En faisant passer tous les rmes dans le premier membre et remplaçant les différentielles r les fonctions, on est amené à considérer la surface ($\Sigma$) lieu du int (X, Y, Z) défini par les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} X = x - cy_1 + bz_1, \\ Y = y - az_1 + cx_1, \\ Z = z - bx_1 + ay_1. \end{cases}$$

l'on différentie ces valeurs de X, Y, Z en tenant compte des lations (5), on trouvera

$$(2)\qquad \begin{cases} dX = z_1\,db - y_1\,dc, \\ dY = x_1\,dc - z_1\,da, \\ dZ = y_1\,da - x_1\,db, \end{cases}$$

de sorte que l'on a identiquement

$$dX\,da + dY\,db + dZ\,dc = 0. \tag{13}$$

Cette équation, toute pareille à l'équation (3), nous donne une solution nouvelle du problème de la déformation infiniment petite. *La surface* $(\Sigma)$ *lieu du point* $(X, Y, Z)$ *et la surface* $(A)$ *lieu du point* $(a, b, c)$ *se correspondent, elles aussi, avec orthogonalité des éléments linéaires.* Nous allons étudier les propriétés géométriques qui rattachent cette nouvelle solution à l'ancienne. Cherchons d'abord à définir la surface $(\Sigma)$.

**886.** Étant donnée la surface $(S)$, menons par l'un de ses points $(x, y, z)$ la *directrice de la déformation,* c'est-à-dire la droite dont les paramètres directeurs sont $x_1$, $y_1$, $z_1$ (n° 852). La perpendiculaire à cette directrice située dans le plan tangent sera évidemment définie par les équations

$$\left\{\begin{aligned} x_1(X-x)+y_1(Y-y)+z_1(Z-z)&=0,\\ a(X-x)+\ b(Y-y)+\ c(Z-z)&=0,\end{aligned}\right. \tag{14}$$

où X, Y, Z désignent pour un instant les coordonnées courantes. Ces équations, évidemment vérifiées quand on y remplace X, Y, Z par leurs valeurs déduites des équations (11), nous montrent donc que cette perpendiculaire va passer par le point de $(\Sigma)$ défini par ces équations (11). Nous allons montrer de plus qu'elle est, en ce point, tangente à $(\Sigma)$.

En effet, les formules (12) nous donnent l'identité

$$x_1\,dX + y_1\,dY + z_1\,dZ = 0, \tag{15}$$

d'où il résulte que la normale à $(\Sigma)$ a pour paramètres directeurs $x_1$, $y_1$, $z_1$ et, par suite, qu'elle est parallèle à la directrice de la déformation. Elle est donc perpendiculaire à la droite définie par les équations (14).

D'après cela, *si* M *désigne le point* $(x, y, z)$ *de* $(S)$, P *le point correspondant* $(X, Y, Z)$ *de* $(\Sigma)$, *la droite* MP *est tangente en* M *à* $(S)$ *et en* P *à* $(\Sigma)$. *Le plan tangent à* $(\Sigma)$ *en* P *est perpendiculaire à la directrice de la déformation en* M ; *et, si l'on considère la déformation infiniment petite de* $(\Sigma)$ *définie par*

*les fonctions $a$, $b$, $c$, qui figurent dans l'équation* (13), *le plan tangent en* M *à* (S) *est perpendiculaire à la directrice de la déformation de* (Σ) *en* P. *On le voit, la relation entre* (S) *et* (Σ) *est réciproque.*

Les surfaces (S) et (Σ) sont donc les focales de la congruence engendrée par la droite MP. On peut ajouter encore une autre propriété essentielle :

*Les lignes asymptotiques se correspondent sur* (S) *et sur* (Σ).

Ce point résulte immédiatement des transformations suivantes. Les formules (7) et (12), rapprochées les unes des autres, nous donnent des équations telles que la suivante

$$dX = \frac{1}{\omega^2}\left(y_1 \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - z_1 \frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \frac{1}{\omega^2}\left(y_1 \frac{\partial z_1}{\partial \beta} - z_1 \frac{\partial y_1}{\partial \beta}\right) d\beta.$$

Si donc on pose

$$(16) \qquad \frac{x_1}{\omega} = x'_1, \qquad \frac{y_1}{\omega} = y'_1, \qquad \frac{z_1}{\omega} = z'_1,$$

on trouvera

$$(17) \qquad dX = \left(y'_1 \frac{\partial z'_1}{\partial \alpha} - z'_1 \frac{\partial y'_1}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(y'_1 \frac{\partial z'_1}{\partial \beta} - z'_1 \frac{\partial y'_1}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

et les formules analogues en Y, Z. Ces relations sont toutes pareilles aux formules (1) et s'en déduisent en remplaçant $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ par $x'_1, y'_1, z'_1$ respectivement. Donc $\alpha$ et $\beta$ sont les paramètres des lignes asymptotiques de (Σ) comme ceux des lignes asymptotiques de (S). On peut d'ailleurs vérifier, bien que ce ne soit pas nécessaire, que $x'_1, y'_1, z'_1$ sont solutions particulières d'une équation de la forme (2), qui est ici

$$(18) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \omega \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\omega}\right)}{\partial \alpha\, \partial \beta} \theta;$$

de sorte que l'on passe de (S) à (Σ) en échangeant $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, $\omega$ en $x'_1$, $y'_1$, $z'_1$, $\frac{1}{\omega}$. Comme d'ailleurs, d'après le théorème de M. Moutard, on sait intégrer complètement l'équation précédente lorsqu'on sait intégrer l'équation (2), on voit que *l'on saura résoudre complètement le problème de la déformation infiniment*

*petite pour* ($\Sigma$) *dès qu'on saura le résoudre pour* (S), *et réciproquement.*

887. On peut encore indiquer une des propriétés de la correspondance entre les deux surfaces (S) et ($\Sigma$) en disant qu'*à tout système conjugué tracé sur l'une des surfaces correspond un système conjugué tracé sur la seconde.* Nous avons déjà remarqué (n° 600) que lorsqu'une correspondance *point par point* est établie entre les points M et P de deux surfaces, le rapport anharmonique de quatre tangentes au point M de la première est égal au rapport anharmonique des quatre tangentes correspondantes au point P de la seconde. D'après cela, supposons qu'à deux tangentes conjuguées de la première correspondent toujours deux tangentes conjuguées de la seconde : il sera nécessaire que la correspondance subsiste lorsque ces deux tangentes conjuguées se confondront entre elles, c'est-à-dire se réuniront en une direction asymptotique. Et, réciproquement, si les tangentes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces, à deux tangentes conjuguées de l'une, c'est-à-dire à deux tangentes divisant harmoniquement l'angle formé par les directions asymptotiques de la première surface, correspondront nécessairement deux tangentes de l'autre surface divisant harmoniquement l'angle formé par les tangentes asymptotiques de cette surface, c'est-à-dire encore deux tangentes conjuguées.

Par suite, à tout réseau conjugué sur la première surface correspondra un réseau conjugué sur la seconde.

888. La congruence des droites MP définies par les formules (14) jouit donc d'une propriété sur laquelle nous avons, à deux reprises déjà, appelé l'attention (n$^{os}$ 483 et 765). *Les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes* (S), ($\Sigma$) *de la surface focale.* Réciproquement, nous allons établir avec M. Guichard [1] que toute congruence jouissant de cette propriété s'obtient par les méthodes que nous venons de faire connaître.

---

[1] GUICHARD (C.), *Détermination des congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. CX, p. 126; janvier 1890).

Considérons, à cet effet, une telle congruence et prenons pour variables indépendantes les paramètres des lignes asymptotiques sur les deux nappes de la surface focale, nappes que nous désignerons encore par (S) et par (Σ); elles seront respectivement définies par des formules telles que les suivantes :

$$(19)\qquad x = \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,

$$(20)\qquad X = \int \left(\sigma_2 \frac{\partial \sigma_3}{\partial \alpha} - \sigma_3 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha}\right) d\alpha - \left(\sigma_2 \frac{\partial \sigma_3}{\partial \beta} - \sigma_3 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \beta}\right) d\beta,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,

où $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sont solutions particulières d'une équation de la forme suivante

$$(21)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = k\theta,$$

et où $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ satisfont à une autre équation de forme analogue

$$(22)\qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \alpha\, \partial \beta} = k_1 \sigma.$$

On aura d'ailleurs, en désignant par $\rho$ un facteur de proportionnalité, les relations

$$(23)\qquad \frac{X - x}{\theta_2 \sigma_3 - \sigma_2 \theta_3} = \frac{Y - y}{\theta_3 \sigma_1 - \sigma_3 \theta_1} = \frac{Z - z}{\theta_1 \sigma_2 - \sigma_1 \theta_2} = \rho,$$

par lesquelles on exprime que la droite de la congruence est tangente aux deux nappes (S), (Σ).

Différentions par rapport à $\alpha$ l'équation

$$X - x = \rho(\theta_2 \sigma_3 - \sigma_2 \theta_3),$$

obtenue en égalant à $\rho$ le premier rapport. Il viendra, en remplaçant $\frac{\partial X}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ par leurs valeurs déduites des formules (19) et (20),

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sigma_2 \frac{\partial \sigma_3}{\partial \alpha} - \sigma_3 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha} - \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} + \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial \alpha}(\theta_2 \sigma_3 - \sigma_2 \theta_3) + \rho\left(\sigma_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \sigma_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right) + \rho\left(\theta_2 \frac{\partial \sigma_3}{\partial \alpha} - \theta_3 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha}\right). \end{aligned}\right.$$

Multiplions par $\theta_1$ et ajoutons l'équation ainsi obtenue à celles

que l'on obtient en effectuant des permutations circulaires sur les indices 1, 2, 3. Nous aurons

$$\Delta = \rho\,\Delta',$$

$\Delta$ et $\Delta'$ désignant, pour abréger, les deux déterminants

$$\Delta = \sum \pm\, \theta_1 \sigma_2 \frac{\partial \sigma_3}{\partial \alpha}, \qquad \Delta' = \sum \pm\, \sigma_1 \theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}.$$

Multiplions maintenant l'équation (24) par $\sigma_1$ et opérons de même : nous aurons, cette fois,

$$\Delta' = \rho\,\Delta.$$

Il faut donc que l'on ait

$$\rho^2 = 1,$$

à moins que les deux déterminants $\Delta$, $\Delta'$ ne soient nuls. Mais alors on aurait

$$\theta_1 \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \theta_2 \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \theta_3 \frac{\partial Z}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\sigma_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \sigma_2 \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \sigma_3 \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0;$$

en répétant un raisonnement analogue sur la variable $\beta$, il faudrait joindre à ces deux équations les suivantes

$$\theta_1 \frac{\partial X}{\partial \beta} + \theta_2 \frac{\partial Y}{\partial \beta} + \theta_3 \frac{\partial Z}{\partial \beta} = 0,$$

$$\sigma_1 \frac{\partial x}{\partial \beta} + \sigma_2 \frac{\partial y}{\partial \beta} + \sigma_3 \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0.$$

En vertu de ces quatre dernières relations, les deux surfaces (S) et ($\Sigma$) auraient leurs normales constamment parallèles, ce qui est absurde.

On doit donc supposer

$$\rho^2 = 1;$$

et, comme il est permis de changer le signe de tous les $\sigma$ ou de tous les $\theta$, on fera

$$\rho = -1.$$

L'équation (24) deviendra donc

$$\left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial \alpha}\right)(\theta_2 + \sigma_2) = \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha}\right)(\theta_3 + \sigma_3).$$

Il résulte de là que, si $\mu$ désigne une fonction auxiliaire, $\theta_i$ et $\sigma_i$ satisfont à l'équation

$$(25)\qquad \frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha} - \frac{\partial\sigma_i}{\partial\alpha} = \mu(\theta_i + \sigma_i)$$

pour $i = 1, 2, 3$.

En opérant de même pour la variable $\beta$, on verra que les mêmes fonctions satisfont à l'équation analogue

$$(26)\qquad \frac{\partial\theta_i}{\partial\beta} + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\beta} = \mu'(\theta_i - \sigma_i).$$

Différentiant l'équation (25) par rapport à $\beta$ et tenant compte des relations (21), (22), (26), nous trouvons

$$k\theta_i - k_1\sigma_i = \mu\mu'(\theta_i - \sigma_i) + \mu(\theta_i + \sigma_i)\frac{\partial\mu}{\partial\beta},$$

ou

$$\left(k - \mu\mu' - \frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)\theta_i = \left(k_1 - \mu\mu' + \frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right)\sigma_i;$$

et, par suite,

$$(27)\qquad k - \mu\mu' - \frac{\partial\mu}{\partial\beta} = 0, \qquad k_1 - \mu\mu' + \frac{\partial\mu}{\partial\beta} = 0.$$

La différentiation de l'équation (26) par rapport à $\alpha$ nous conduirait de même aux relations

$$(28)\qquad k - \mu\mu' - \frac{\partial\mu'}{\partial\alpha} = 0, \qquad k_1 - \mu\mu' + \frac{\partial\mu'}{\partial\alpha} = 0.$$

La comparaison des équations ainsi obtenues, (27) et (28), nous donne

$$\frac{\partial\mu}{\partial\beta} = \frac{\partial\mu'}{\partial\alpha},$$

ce qui permet de poser, $\omega$ étant une fonction auxiliaire,

$$\mu = \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}, \qquad \mu' = \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}.$$

Il vient ensuite

$$(29)\qquad k = \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \qquad k_1 = \omega\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Le reste du calcul s'achève sans difficulté et nous fournit la

solution à laquelle nous avait conduit le problème de la déformation infiniment petite.

889. En étudiant un cas particulier des congruences précédentes, nous avons rencontré (n° 763) une relation entre les courbures des deux nappes de la surface focale que nous allons maintenant généraliser.

Si nous désignons par $c$, $c'$, $c''$ les cosinus directeurs de la normale à (S), par R et R' les rayons de courbure principaux de cette surface, nous avons vu (n$^{os}$ 870 et 873) que l'on a

$$(30)\qquad \theta_1 = c\sqrt[4]{-RR'},\qquad \theta_2 = c'\sqrt[4]{-RR'},\qquad \theta_3 = c''\sqrt[4]{-RR'}.$$

Si $c_1$, $c'_1$, $c''_1$, $R_1$, $R'_1$ désignent les mêmes grandeurs pour la surface (Σ), nous aurons de même

$$(31)\qquad \sigma_1 = c_1\sqrt[4]{-R_1R'_1},\qquad \sigma_2 = c'_1\sqrt[4]{-R_1R'_1},\qquad \sigma_3 = c''_1\sqrt[4]{-R_1R'_1}.$$

Les formules (23) nous donnent, $\rho$ devant y être remplacé par 1, des relations telles que la suivante

$$X - x = \sqrt[4]{-RR'}\sqrt[4]{-R_1R'_1}\,(c'c''_1 - c'_1c''),$$

d'où l'on déduit pour le segment focal MP l'expression

$$\overline{MP}^2 = \mathsf{S}(X-x)^2 = \sqrt{-RR'}\sqrt{-R_1R'_1}\,\sin^2 V,$$

V désignant l'angle des plans focaux. Élevant au carré, nous obtenons la relation

$$(32)\qquad \overline{MP}^4 = RR'R_1R'_1\sin^4 V$$

comprenant comme cas particulier celle que nous avons obtenue au n° 763 [1].

---

[1] Dans des Notes présentées en 1894 à l'Académie des Sciences, M. A. Demoulin et M. E. Cosserat se sont occupés récemment de cette relation, signalée en premier lieu par Ribaucour dans son *Étude des Élassoides*, démontrée ensuite par M. Bianchi dans le Mémoire inséré au t. XVIII, 2e série, des *Annali di Matematica pura ed applicata* et intitulé : *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali*. M. Demoulin l'a démontrée de nouveau par une méthode élégante et M. Cosserat a établi qu'elle constitue une pro-

890. Après avoir étudié la surface $(\Sigma)$ passons à la surface $(A)$, lieu du point $(a, b, c)$, qui correspond à $(\Sigma)$ avec orthogonalité des éléments linéaires. Il résulte immédiatement des formules (6) que *le rayon vecteur de* $(A)$ *est parallèle à la normale de* $(S)$, et des formules (7) qu'*elle correspond à* $(S_1)$ *avec parallélisme des plans tangents.*

Ces formules (7) expriment, en effet, que, sur les deux surfaces $(A)$ et $(S_1)$, les tangentes aux courbes de paramètre $\beta$ et aux courbes de paramètre $\alpha$ sont constamment parallèles. De là résulte la propriété annoncée et l'on voit de plus que *les deux familles de courbes de paramètres* $\alpha$ *et* $\beta$ *sont conjuguées à la fois sur les deux surfaces.* Nous retrouvons la correspondance par plans tangents parallèles si souvent employée dans les Livres précédents [II, p. 234 et suiv.]. Ce qu'il importe de mettre en lumière, ce sont les caractères distinctifs du cas spécial que nous rencontrons ici.

Nous pouvons faire d'abord la remarque suivante : les lignes de paramètres $\alpha$ et $\beta$, qui correspondent sur $(A)$ aux lignes asymptotiques de $(S)$, correspondent par cela même aux lignes asymptotiques de $(\Sigma)$ et doivent former par suite, sur $(A)$, un réseau conjugué dont l'équation ponctuelle ait ses invariants égaux (n° 883). Ainsi, *sur* $(A)$ *et sur* $(S_1)$, *les deux systèmes conjugués formés des courbes de paramètres* $\alpha$ *et* $\beta$, *courbes dont les tangentes correspondantes sont parallèles, ont leurs invariants ponctuels égaux.* Au reste cette proposition se vérifie immédiatement à l'aide des formules (7); car si l'on élimine successivement $a$ et $x_1$ entre les deux équations

$$(33) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = -\omega^2 \frac{\partial a}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \beta} = \omega^2 \frac{\partial a}{\partial \beta},$$

---

priété *caracteristique* des congruences dont nous nous occupons ici. M. E. Waelsch l'a rattachée, avec d'autres propriétés, à la théorie que nous lui devons des invariants projectifs pour les congruences rectilignes.

*Voir* A. Demoulin, *Sur une proprieté métrique commune à trois classes particulières de congruences rectilignes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVIII, p. 242).

E. Cosserat, *Sur des congruences rectilignes et sur le problème de Ribaucour* (même tome, p. 335).

E. Waelsch, *Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectilignes* (même tome, p. 736).

on obtient, dans l'un et l'autre cas, une équation linéaire du second ordre à invariants égaux.

Examinons maintenant les propositions géométriques qui se rattachent à cette notion purement analytique de l'égalité des invariants. Et, pour cela, considérons d'abord les systèmes tels que le suivant

$$(34)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = \lambda \frac{\partial a}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \beta} = \mu \frac{\partial a}{\partial \beta},$$

qui convient à la correspondance la plus générale par plans tangents parallèles entre deux surfaces : $(S_1)$, lieu du point $(x_1, y_1, z_1)$ et (A), lieu du point $(a, b, c)$. Le système (33) s'en déduira en supposant

$$\lambda = -\mu.$$

Parmi les éléments géométriques qu'il convient d'associer aux surfaces (A) et $(S_1)$, nous signalerons en premier lieu le suivant.

Par les différents points de l'une des surfaces, de $(S_1)$ par exemple, menons des parallèles aux rayons vecteurs correspondants de (A). Ces droites engendrent une congruence (G). Nous savons déjà (n° 426) que les développables de cette congruence correspondent aux courbes du système conjugué commun. Au reste, on le vérifie immédiatement comme il suit. Les deux points F, $F_1$, définis par les formules

$$(35)\quad \begin{cases} X = x_1 - \lambda a, \\ Y = y_1 - \lambda b, \\ Z = z_1 - \lambda c, \end{cases} \qquad (36)\quad \begin{cases} X_1 = x_1 - \mu a, \\ Y_1 = y_1 - \mu b, \\ Z_1 = z_1 - \mu c, \end{cases}$$

sont évidemment situés sur la droite de la congruence; et ils décrivent, le premier lorsque $\alpha$ varie seul, le second lorsque $\beta$ varie seul, des courbes tangentes à cette droite. Ces deux points F, $F_1$ sont donc les points focaux situés sur la droite de la congruence; et les développables de cette congruence correspondent aux courbes de paramètres $\alpha$ et $\beta$. De plus, si $M_1$ désigne le pied $(x_1, y_1, z_1)$ de la droite sur $(S_1)$, on a, d'après les formules précédentes,

$$(37)\qquad \frac{M_1 F}{M_1 F_1} = \frac{\lambda}{\mu},$$

Par suite si, comme il arrive dans les formules (33), on a $\lambda = -\mu$, le point $M_1$ sera le milieu du segment $FF_1$ et la surface $(S_1)$ sera ce que nous avons appelé (n° 260) la *surface moyenne* de la congruence (G).

On pourrait substituer à la congruence (G) la congruence (G') formée par les droites qui joignent les points correspondants de (A) et de $(S_1)$. Le lecteur démontrera aisément que les points focaux de chaque droite de cette congruence divisent harmoniquement le segment formé par ces points correspondants. Cette proposition comprend même la précédente comme cas particulier : il suffit de supposer que la surface (A) grandisse indéfiniment en demeurant homothétique à elle-même.

891. Revenons à la congruence (G). Si l'on remarque que le rayon vecteur de (A) est parallèle à la normale au point correspondant de (S), on voit que la congruence est susceptible d'une nouvelle définition : elle est engendrée par une parallèle à la normale en un point quelconque de (S), cette parallèle étant menée par le point correspondant de $(S_1)$. Les résultats précédents peuvent donc s'énoncer comme il suit :

*Si deux surfaces* (S) *et* $(S_1)$ *se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, la droite menée par un point de l'une* $(S_1)$, *parallèlement à la normale au point correspondant de l'autre* (S), *engendre une congruence dont les développables correspondent aux lignes asymptotiques de* (S) *et dont la surface moyenne est la surface* $(S_1)$.

En d'autres termes, *la représentation sphérique des développables de la congruence est identique à celle des lignes asymptotiques de la surface* (S) ; *et, par suite, les plans focaux relatifs à chaque droite de la congruence sont perpendiculaires aux tangentes asymptotiques de la surface* (S), *construites pour le point de* (S) *qui correspond à cette droite de la congruence*.

C'est la proposition de Ribaucour, déjà démontrée par la Géométrie au n° 861.

892. On voit que les développables de la congruence (G) inter-

ceptent sur la surface moyenne $(S_1)$ le réseau formé des courbes de paramètres $\alpha$ et $\beta$, c'est-à-dire un réseau conjugué. Proposons-nous, avec M. Cosserat [1], de définir toutes les congruences rectilignes jouissant de cette propriété. Cherchons même d'une manière plus générale, avec M. Kœnigs, toutes les congruences dont les développables interceptent sur deux surfaces (S) et (T) des réseaux conjugués et qui sont telles en outre que les points focaux de chaque droite divisent harmoniquement le segment de cette droite compris entre les deux surfaces (S) et (T). Il suffira ensuite de supposer que la surface (T) se réduit au plan de l'infini pour obtenir les congruences plus particulières que nous avons en vue.

Or, nous avons déjà considéré les congruences dont les développables interceptent sur deux surfaces (S) et (T) un réseau conjugué et nous avons vu (n° 422) que, si l'on désigne par $\alpha$ et $\beta$ les paramètres des développables, les coordonnées homogènes $x$, $y$, $z$, $t$ et $a$, $b$, $c$, $h$ des points M et P où la droite de la congruence coupe (S) et (T) peuvent être choisies de manière à satisfaire à des équations de la forme

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial \alpha}+\lambda\frac{\partial a}{\partial \alpha}=0,\\ &\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\lambda\frac{\partial b}{\partial \alpha}=0,\\ &\frac{\partial z}{\partial \alpha}+\lambda\frac{\partial c}{\partial \alpha}=0,\\ &\frac{\partial t}{\partial \alpha}+\lambda\frac{\partial h}{\partial \alpha}=0,\end{aligned}\right. \qquad (39)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial \beta}+\mu\frac{\partial a}{\partial \beta}=0,\\ &\frac{\partial y}{\partial \beta}+\mu\frac{\partial b}{\partial \beta}=0,\\ &\frac{\partial z}{\partial \beta}+\mu\frac{\partial c}{\partial \beta}=0,\\ &\frac{\partial t}{\partial \beta}+\mu\frac{\partial h}{\partial \beta}=0.\end{aligned}\right.$$

Il est clair ici que les points focaux de la droite MP sont définis par des équations telles que les suivantes

$$x+\lambda a = X, \qquad x+\mu a = X_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

et correspondent, le premier aux développables de paramètre $\beta$, le second à celles de paramètre $\alpha$. Par conséquent, le rapport

(1) COSSERAT (E.), *Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces* (*Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, p. N.1; 1893).

anharmonique des deux points focaux et des points M et P sera égal au quotient de $\lambda$ par $\mu$. Donc, pour que ce rapport soit égal à $-1$, il faudrait que l'on ait

$$\lambda = -\mu.$$

Dès lors, *les équations ponctuelles relatives aux systèmes conjugués tracés sur* (S) *et sur* (T) *seront à invariants égaux,* puisqu'on obtiendrait ces équations en éliminant, soit $x$, soit $a$ entre les deux suivantes

$$(40) \qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial a}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial x}{\partial \beta} - \lambda \frac{\partial a}{\partial \beta} = 0.$$

La question que nous nous proposions est ainsi complètement résolue.

Pour revenir au cas particulier où (T) se réduit au plan de l'infini, il faut faire

$$h = 0;$$

alors les deux dernières formules (38) et (39) donnent

$$t = \text{const.}$$

On peut prendre $t = 1$; alors les équations (38) et (39), où $x, y, z$ deviennent les coordonnées ordinaires, et où l'on a $\mu = -\lambda$, reproduisent le système (7). On obtient donc la proposition suivante due à M. Cosserat [1] :

*Les congruences dont les développables découpent sur la surface moyenne* ($S_1$) *un réseau conjugué ont même représentation sphérique de leurs développables que les lignes asymptotiques d'une autre surface* (S) *qui correspond à la surface moyenne avec orthogonalité des éléments linéaires.*

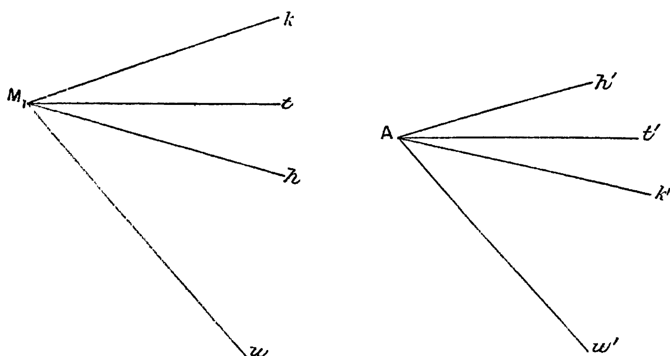
**893.** On peut, sans avoir recours à une congruence auxiliaire, indiquer d'autres propriétés caractéristiques du système (33). Désignons par $M_1$ et par A deux points correspondants sur les

---

(1) Pour la généralisation que nous en avons donnée, on pourra consulter une Note de M. Koenigs : *Sur les systèmes conjugués à invariants égaux* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXIII, p. 1022; 1891).

surfaces $(S_1)$ et (A). Soient (*fig.* 82) $M_1 t$, $M_1 u$ les tangentes aux courbes de paramètres $\alpha$ et $\beta$ sur $(S_1)$; $At'$, $Au'$ les tangentes aux courbes correspondantes de (A), tangentes nécessairement parallèles aux premières. A une direction arbitraire $M_1 h$ de la première surface correspondra non plus la direction parallèle $Ak'$ de la se-

Fig. 82.




conde, mais la conjuguée harmonique $Ah'$ de cette direction par rapport aux deux tangentes $At'$, $Au'$; de sorte que, à deux directions $M_1 h$, $M_1 k$, divisant harmoniquement l'angle des tangentes $M_1 t$, $M_1 u$, correspondent, mais en sens inverse, deux directions parallèles de la seconde surface.

Analytiquement, cette propriété correspond à la transformation suivante que l'on peut faire subir au système (7). Écrivons-le comme il suit

$$m\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + n\frac{\partial x_1}{\partial \beta} = -\omega^2\left(m\frac{\partial a}{\partial \alpha} - n\frac{\partial a}{\partial \beta}\right),$$

$$m\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} - n\frac{\partial x_1}{\partial \beta} = -\omega^2\left(m\frac{\partial a}{\partial \alpha} + n\frac{\partial a}{\partial \beta}\right).$$

En prenant comme nouvelles variables les paramètres des deux familles de courbes définies par la double équation différentielle

$$n\,d\alpha = \pm m\,d\beta,$$

on lui donnera la forme

$$(41) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \rho} = P\frac{\partial a}{\partial \rho_1}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \rho_1} = Q\frac{\partial a}{\partial \rho},$$

dont l'interprétation géométrique fournit la proposition déjà obtenue.

894. Cette proposition comprend comme cas particulier la suivante :

*Les lignes asymptotiques de l'une quelconque des surfaces* (A) *et* ($S_1$) *correspondent à un système conjugué tracé sur l'autre surface,*

que l'on peut vérifier comme il suit. Écrivons l'équation différentielle des lignes asymptotiques. Si l'on pose, pour abréger,

$$(42) \qquad L = \left| \frac{\partial a}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial a}{\partial \beta} \quad \frac{\partial^2 a}{\partial \alpha^2} \right|, \qquad M = \left| \frac{\partial a}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial a}{\partial \beta} \quad \frac{\partial^2 a}{\partial \beta^2} \right|,$$

et, si l'on tient compte du système (7), on trouvera que les lignes asymptotiques de (A) sont définies par l'équation différentielle

$$(43) \qquad L\, d\alpha^2 + M\, d\beta^2 = 0,$$

et celles de ($S_1$) par la suivante

$$(44) \qquad L\, d\alpha^2 - M\, d\beta^2 = 0,$$

et de ce résultat analytique découle la proposition annoncée. En effet, sur une surface quelconque où les coordonnées d'un point seraient des fonctions de $\alpha$ et de $\beta$, les équations (43) et (44) définissent deux réseaux de courbes telles que les tangentes aux courbes du premier divisent harmoniquement l'angle des tangentes aux courbes du second. Nous rencontrerons souvent cette relation dans la suite de ce Chapitre et nous dirons qu'*alors les réseaux se divisent harmoniquement*. Par exemple, un réseau conjugué divise harmoniquement le réseau des asymptotiques et *vice versa*. Si les équations précédentes sont privées du terme en $d\alpha\, d\beta$, c'est que les asymptotiques divisent harmoniquement le réseau conjugué formé des courbes de paramètres $\alpha$ et $\beta$.

D'après cela, considérons les trois réseaux définis par les équations

$$(\text{I}) \qquad d\alpha\, d\beta = 0,$$

$$(\text{II}) \qquad L\, d\alpha^2 - M\, d\beta^2 = 0,$$

$$(\text{III}) \qquad L\, d\alpha^2 + M\, d\beta^2 = 0.$$

Sur chaque surface ces trois réseaux se divisent harmoniquement. Sur la surface (S) le premier est formé des lignes asymptotiques, les deux autres sont conjugués. Sur la surface ($S_1$) le système II donne les lignes asymptotiques; I et III définissent des réseaux conjugués. Enfin, sur la surface (A) les systèmes I et II sont conjugués, le système III est composé des lignes asymptotiques.

895. Pour obtenir des résultats plus complets encore, nous sommes conduit à adjoindre aux quatre surfaces (S), ($S_1$), ($\Sigma$), (A) deux nouvelles surfaces ($\Sigma_1$) et ($A_1$) qu'on définira de la manière suivante.

La relation entre (S) et ($S_1$) étant parfaitement réciproque, on peut faire correspondre au système (5) le suivant

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} dx_1 &= c_1\,dy - b_1\,dz,\\ dy_1 &= a_1\,dz - c_1\,dx,\\ dz_1 &= b_1\,dx - a_1\,dy,\end{aligned}\right.$$

que l'on en déduira par l'échange de $x_1, y_1, z_1$ en $x, y, z$. D'après cela, si l'on introduit, comme au n° 885, les nouvelles variables définies par les formules

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= x_1 - c_1 y + b_1 z,\\ Y_1 &= y_1 - a_1 z + c_1 x,\\ Z_1 &= z_1 - b_1 x + a_1 y,\end{aligned}\right.$$

$X_1$, $Y_1$, $Z_1$ seront les coordonnées d'un point $P_1$ décrivant une surface ($\Sigma_1$) dont la relation à ($S_1$) sera la même que celle de ($\Sigma$) à (S). C'est-à-dire que ($\Sigma_1$) et ($S_1$) seront les deux surfaces focales de la congruence engendrée par la droite qui joint leurs points correspondants; à tout système conjugué tracé sur ($S_1$) correspondra un système conjugué sur ($\Sigma_1$); et, de plus, les équations (46) nous donneront par la différentiation les suivantes

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} dX_1 &= z\,db_1 - y\,dc_1,\\ dY_1 &= x\,dc_1 - z\,da_1,\\ dZ_1 &= y\,da_1 - x\,db_1,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(48)\qquad dX_1\,da_1 + dY_1\,db_1 + dZ_1\,dc_1 = 0.$$

Ainsi *la surface* $(\Sigma_1)$ *correspond à la surface* $(A_1)$ *avec orthogonalité des éléments linéaires.* Remarquons que, si l'on échange $(S)$ et $(S_1)$, il faut, pour conserver les relations géométriques, échanger $(\Sigma)$ et $(\Sigma_1)$, $(A)$ et $(A_1)$.

896. Mais les surfaces $(A)$ et $(A_1)$ sont liées par une relation géométrique des plus remarquables. *Elles sont polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à la sphère de rayon* $\sqrt{-1}$ *ayant pour centre l'origine des coordonnées.*

Si l'on porte, en effet, les valeurs de $dx_1$, $dy_1$, $dz_1$ tirées des formules (45) dans les équations (5) en tenant compte de la relation évidente

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

il vient

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 + 1 = 0. \tag{49}$$

D'autre part, si, dans la relation

$$a_1\,dx_1 + b_1\,dy_1 + c_1\,dz_1 = 0,$$

on remplace les dérivées de $x_1$, $y_1$, $z_1$ par leurs valeurs déduites du système (7), il vient

$$a_1\frac{\partial a}{\partial \alpha} + b_1\frac{\partial b}{\partial \alpha} + c_1\frac{\partial c}{\partial \alpha} = 0, \qquad a_1\frac{\partial a}{\partial \beta} + b_1\frac{\partial b}{\partial \beta} + c_1\frac{\partial c}{\partial \beta} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$a_1\,da + b_1\,db + c_1\,dc = 0. \tag{50}$$

Cette relation différentielle, rapprochée de l'équation (49), achève de démontrer la proposition que nous avons énoncée. Remarquons d'ailleurs que, les deux surfaces $(A)$ et $(A_1)$ étant polaires réciproques l'une de l'autre, *il y a correspondance entre leurs lignes asymptotiques et leurs réseaux conjugués.*

La relation entre les surfaces $(A)$ et $(A_1)$ se déduit encore très simplement des remarques suivantes.

En vertu de la relation d'orthogonalité

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0,$$

il existe une droite (D) dont les coordonnées (n° 139) sont

$$dx_1, \quad dy_1, \quad dz_1, \quad -dx, \quad -dy, \quad -dz,$$

et les formules (5) expriment que cette droite passe par le point $(a, b, c)$. Cette droite, ayant ses cosinus directeurs proportionnels à $dx_1$, $dy_1$, $dz_1$, est nécessairement tangente à la surface (A) décrite par le point $(a, b, c)$.

Pour le même motif, la droite $(D_1)$ dont les coordonnées sont

$$dx, \quad dy, \quad dz, \quad -dx_1, \quad -dy_1, \quad -dz_1,$$

est tangente à la surface $(A_1)$ lieu du point $(a_1, b_1, c_1)$. Et, comme les deux droites $(D)$, $(D_1)$ sont polaires réciproques par rapport à la sphère de rayon $i$ admettant pour centre l'origine des coordonnées, il doit en être de même des surfaces $(A)$ et $(A_1)$.

897. Nous avons déjà six surfaces $(S)$, $(S_1)$, $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$, $(A)$, $(A_1)$. Mais nous pouvons continuer l'application de notre méthode de déduction et nous allons obtenir six nouvelles surfaces.

La relation différentielle (13) peut être remplacée par le système (12); mais elle peut l'être aussi par le suivant

$$(51) \qquad \begin{cases} da = Z_3\, dY - Y_3\, dZ, \\ db = X_3\, dZ - Z_3\, dX, \\ dc = Y_3\, dX - X_3\, dY, \end{cases}$$

où $X_3$, $Y_3$, $Z_3$ désignent des fonctions auxiliaires, et qui est nouveau. Opérant comme au n° 885, on introduira les fonctions

$$(52) \qquad \begin{cases} a_3 = a - Z_3 Y + Y_3 Z, \\ b_3 = b - X_3 Z + Z_3 X, \\ c_3 = c - Y_3 X + X_3 Y, \end{cases}$$

qui conduisent à la nouvelle relation

$$(53) \qquad da_3\, dX_3 + db_3\, dY_3 + dc_3\, dZ_3 = 0,$$

tout à fait semblable à celles, (13) et (48), qui ont été déjà déduites de la relation fondamentale (3). Mais ici il se présente une circonstance nouvelle : on peut obtenir algébriquement les valeurs de $X_3$, $Y_3$, $Z_3$ et, par suite, celles de $a_3$, $b_3$, $c_3$.

On déduit, en effet, du système (51), la relation

$$(54) \qquad X_3\, da + Y_3\, db + Z_3\, dc = 0,$$

et, si on la compare à l'équation (50), on voit que $X_3$, $Y_3$, $Z_3$ sont proportionnels à $a_1$, $b_1$, $c_1$.

D'autre part, de même que la comparaison des systèmes (5) et (45) nous avait montré que (A), ($A_1$) sont polaires réciproques, de même la comparaison des systèmes tout semblables (12) et (51) nous montre que *la surface* ($\Sigma_3$) *lieu du point* ($X_3$, $Y_3$, $Z_3$) *et la surface* ($S_1$) *sont aussi polaires réciproques.* On a donc

$$X_3 x_1 + Y_3 y_1 + Z_3 z_1 + 1 = 0; \tag{55}$$

et, comme $X_3$, $Y_3$, $Z_3$ sont proportionnels à $a_1$, $b_1$, $c_1$, on a

$$\frac{X_3}{a_1} = \frac{Y_3}{b_1} = \frac{Z_3}{c_1} = -\frac{1}{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1} = -\frac{1}{a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1 Z_1}. \tag{56}$$

Portant ces valeurs dans les formules (52), on trouve

$$\frac{a_3}{X_1} = \frac{b_3}{Y_1} = \frac{c_3}{Z_1} = -\frac{1}{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1} = -\frac{1}{a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1 Z_1}. \tag{57}$$

On a donc deux nouvelles surfaces, ($\Sigma_3$), déjà définie, et ($A_3$), lieu du point ($a_3$, $b_3$, $c_3$), qui se correspondent encore avec orthogonalité des éléments linéaires, en vertu de la formule (53).

Les formules analogues

$$\frac{X_2}{a} = \frac{Y_2}{b} = \frac{Z_2}{c} = -\frac{1}{ax + by + cz} = -\frac{1}{aX + bY + cZ}, \tag{58}$$

$$\frac{a_2}{X} = \frac{b_2}{Y} = \frac{c_2}{Z} = -\frac{1}{ax + by + cz} = -\frac{1}{aX + bY + cZ} \tag{59}$$

définiront de même deux nouvelles surfaces ($A_2$) et ($\Sigma_2$), donnant naissance aux systèmes

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} da_1 &= Z_2\, dY_1 - Y_2\, dZ_1, \\ db_1 &= X_2\, dZ_1 - Z_2\, dX_1, \\ dc_1 &= Y_2\, dX_1 - X_2\, dY_1, \end{aligned}\right. \qquad (61)\quad \left\{\begin{aligned} da_2 &= Z_1\, dY_2 - Y_1\, dZ_2, \\ db_2 &= X_1\, dZ_2 - Z_1\, dX_2, \\ dc_2 &= Y_1\, dX_2 - X_1\, dY_2, \end{aligned}\right.$$

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} a_2 &= a_1 - Z_2 Y_1 + Y_2 Z_1, \\ b_2 &= b_1 - X_2 Z_1 + Z_2 X_1, \\ c_2 &= c_1 - Y_2 X_1 + X_2 Y_1 \end{aligned}\right.$$

et à la nouvelle relation

$$da_2\, dX_2 + db_2\, dY_2 + dc_2\, dZ_2 = 0. \tag{63}$$

On peut continuer encore et remplacer cette relation par le

système

$$(64)\quad \begin{cases} dX_2 = z_3\,db_2 - y_3\,dc_2, \\ dY_2 = x_3\,dc_2 - z_3\,da_2, \\ dZ_2 = y_3\,da_2 - x_3\,db_2, \end{cases}$$

qui conduit à introduire les nouvelles variables

$$(65)\quad \begin{cases} x_2 = X_2 - b_2 z_3 + c_2 y_3, \\ y_2 = Y_2 - c_2 x_3 + a_2 z_3, \\ z_2 = Z_2 - a_2 y_3 + b_2 x_3, \end{cases}$$

et donne deux nouvelles surfaces, $(S_2)$, lieu du point $(x_2, y_2, z_2)$, et $(S_3)$, lieu du point $(x_3, y_3, z_3)$. La différentiation donne encore

$$(66)\quad \begin{cases} dx_2 = c_2\,dy_3 - b_2\,dz_3, \\ dy_2 = a_2\,dz_3 - c_2\,dx_3, \\ dz_2 = b_2\,dx_3 - a_2\,dy_3, \end{cases}$$

et, de là, on déduit la nouvelle relation

$$(67)\quad dx_2\,dx_3 + dy_2\,dy_3 + dz_2\,dz_3 = 0.$$

Mais ici il faut s'arrêter. *Le cycle est fermé.* Si l'on calcule, par un procédé analogue à ceux qui ont été employés, les valeurs de $x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$, on a

$$(68)\quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_3}{x} = \frac{y_3}{y} = \frac{z_3}{z} = -\frac{1}{xx_1 + yy_1 + zz_1};$$

de sorte que ces équations ne changent pas si l'on échange les indices 2 et 3, 0 et 1. Par suite, si l'on voulait continuer l'application de notre méthode à la relation (53), on retrouverait les deux surfaces $(S_2)$ et $(S_3)$.

On vérifiera aisément les relations

$$(69)\quad \begin{cases} dx_3 = c_3\,dy_2 - b_3\,dz_2, \\ dy_3 = a_3\,dz_2 - c_3\,dx_2, \\ dz_3 = b_3\,dx_2 - a_3\,dy_2, \end{cases}$$

toutes pareilles au système (66).

Ainsi se trouve constitué l'ensemble des douze surfaces

$$(S),\ (S_1),\ (\Sigma),\ (A),\ (\Sigma_1),\ (A_1),\ (\Sigma_3),\ (A_3),\ (\Sigma_2),\ (A_2),\ (S_2),\ (S_3),$$

que nous avions annoncé. On peut les grouper comme il suit :

*Couples de surfaces qui se correspondent point par point.*

| 1° avec orthogonalité des éléments linéaires. | 2° par plans tangents parallèles. | 3° par polaires réciproques. | 4° comme focales d'une même congruence rectiligne. |
|---|---|---|---|
| (S), (S₁); | (A), (S₁); | (A), (A₁); | (S), (Σ); |
| (A), (Σ); | (A₁), (S); | (S₁), (Σ₃); | (S₁), (Σ₁); |
| (A₁), (Σ₁); | (Σ), (Σ₃); | (S), (Σ₂); | (A), (A₃); |
| (A₂), (Σ₂); | (Σ₁), (Σ₂); | (Σ₁), (S₃); | (A₁), (A₂); |
| (A₃), (Σ₃); | (S₂), (A₃); | (S₂), (Σ); | (Σ₃), (S₃); |
| (S₂), (S₃); | (S₃), (A₂); | (A₂), (A₃); | (Σ₂), (S₂); |

Ce Tableau conduit à un grand nombre de conséquences. Nous allons le compléter par le suivant.

Les trois réseaux que nous avons désignés par les nos I, II, III, qui sont harmoniques et qui sont formés respectivement des lignes asymptotiques de (S), de $(S_1)$ et de (A), se retrouvent sur les douze surfaces. Nous avons vu que le système III correspond à un réseau conjugué sur (S) et sur $(S_1)$. D'après le Tableau précédent, il correspondra encore à un réseau conjugué sur les polaires réciproques $(\Sigma_2)$, $(\Sigma_3)$ de ces surfaces aussi bien que sur $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$ qui leur correspondent comme focales d'une même congruence rectiligne. Considérons en particulier $(\Sigma)$, $(\Sigma_3)$ ou $(\Sigma_1)$, $(\Sigma_2)$ qui se correspondent par plans tangents parallèles. Nous avons vu (n° 890) que les réseaux conjugués communs correspondent à une équation ponctuelle dont les invariants sont égaux. D'après cela, le système III, qui correspond sur $(\Sigma_2)$, $(\Sigma_3)$ à des réseaux conjugués ayant leurs invariants ponctuels égaux, donnera nécessairement, sur les polaires réciproques, des réseaux conjugués dont l'équation *tangentielle* aura ses invariants égaux. Ainsi :

*Lorsque deux surfaces se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, nous avons vu que les lignes asymptotiques de chacune correspondent sur l'autre à un réseau conjugué dont les invariants ponctuels sont égaux. Nous reconnaissons de plus que le système conjugué commun aux deux surfaces a ses invariants tangentiels égaux et que les trois réseaux sont en relation harmonique.*

D'après cela, les systèmes I, II, III correspondent, sur chacune de nos douze surfaces, au réseau des asymptotiques, à un réseau

conjugué ayant ses invariants ponctuels égaux, à un réseau conjugué ayant ses invariants tangentiels égaux, d'après la loi indiquée dans le Tableau suivant :

| | LE SYSTÈME I EST | LE SYSTÈME II EST | LE SYSTÈME III EST |
|---|---|---|---|
| Réseau des asymptotiques pour........ | $(S)$, $(\Sigma)$, $(S_2)$, $(\Sigma_2)$ | $(S_1)$, $(\Sigma_1)$, $(S_3)$, $(\Sigma_3)$ | $(A)$, $(A_1)$, $(A_2)$, $(A_3)$ |
| Réseau conjugué à invariants ponctuels égaux pour....... | $(S_1)$, $(A)$, $(S_3)$, $(A_2)$ | $(S)$, $(A_1)$, $(S_2)$, $(A_3)$ | $(\Sigma)$, $(\Sigma_1)$, $(\Sigma_2)$, $(\Sigma_3)$ |
| Réseau conjugué à invariants tangentiels égaux pour........ | $(\Sigma_1)$, $(\Sigma_3)$, $(A_1)$, $(A_3)$ | $(\Sigma)$, $(\Sigma_2)$, $(A)$, $(A_2)$ | $(S)$, $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$ |

On voit que la théorie des systèmes conjugués à invariants égaux se confond avec celle de la déformation infiniment petite. Nous nous contenterons d'indiquer ici la conséquence suivante des théorèmes que nous venons de démontrer :

*Lorsque, sur une surface, un réseau conjugué a ses invariants ponctuels* (ou tangentiels) *égaux, le réseau conjugué qui lui est harmonique a ses invariants tangentiels* (ou ponctuels) *égaux.*

Et nous réserverons les développements géométriques pour le Chapitre suivant.

# CHAPITRE IV.

## TRANSFORMATIONS DIVERSES. INVERSION COMPOSÉE.

Les six couples de surfaces qui se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires. — Théorème et construction de Ribaucour. — Quand on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une surface donnée, on sait résoudre ce même problème pour toutes les surfaces homographiques et corrélatives. — Démonstration de ce théorème général pour les homographies qui conservent le plan de l'infini; pour la transformation par polaires réciproques relative au paraboloïde défini par l'équation $z = \frac{x^2+y^2}{2}$. — Ces deux cas particuliers entraînent le théorème général. — Définition de l'*inversion composée :* sa propriété fondamentale. — Quand on sait résoudre le problème de la déformation pour une surface (S), on sait aussi le résoudre pour toutes celles qui en dérivent par l'inversion composée. — L'inversion composée rattachée aux notions relatives aux formes quadratiques dont les coefficients sont constants.

---

898. D'après les résultats que nous avons établis au Chapitre précédent, on voit que, si l'on connaît deux surfaces (S), $(S_1)$ qui se correspondent point par point avec orthogonalité des éléments linéaires, on pourra en déduire, par de simples opérations algébriques, cinq autres couples qui seront formés de surfaces se correspondant l'une à l'autre de la même manière que les deux premières.

Si nous rangeons ces couples dans l'ordre suivant

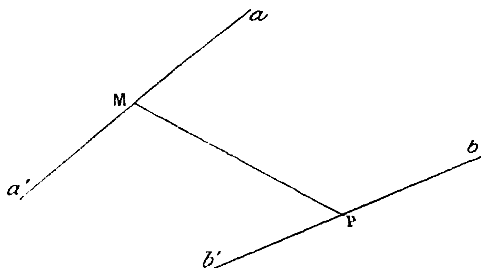
$$(S), (S_1);\ (\Sigma), (A);\ (\Sigma_3), (A_3);$$
$$(S_3), (S_2);\ (A_2), (\Sigma_2);\ (A_1), (\Sigma_1);\ (S), (S_1),$$

on reconnaît que chacun d'eux se déduit de celui qui précède toujours par la même opération, celle qui nous a permis, étant donné le couple (S), $(S_1)$, d'en déduire le suivant $(\Sigma)$, (A). Il semble, à la vérité, que, la relation entre deux couples consécutifs étant parfaitement réciproque, cette opération, appliquée sans modification à chaque couple, devrait redonner le précédent; mais, comme elle dépend de l'ordre des surfaces qui composent le

couple, il suffit de changer cet ordre pour obtenir le couple qui suit.

On peut interpréter géométriquement les formules que nous avons données et qui permettent de passer de chaque couple au suivant. Mais la construction à laquelle on est ainsi conduit prend un énoncé plus simple, si l'on substitue aux couples de surfaces qui se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires les couples, formés de surfaces applicables, qu'on peut leur associer d'après la méthode du n° 854. Pour cela, portons à partir de chaque point M de la surface (S) (*fig.* 83), et sur la directrice de

Fig. 83.




la déformation relative à ce point, c'est-à-dire sur la parallèle au rayon vecteur correspondant de $(S_1)$, des longueurs $Ma$, $Ma'$, égales et de sens contraires, proportionnelles au module de la déformation, c'est-à-dire égales au rayon vecteur de $(S_1)$ multiplié par la constante $k$, les deux surfaces (U), (U'), lieux des points $a$ et $a'$ seront applicables l'une sur l'autre. Opérons de même pour la surface $(\Sigma)$, au point P qui correspond à M; c'est-à-dire prenons, sur la droite parallèle au rayon vecteur correspondant de (A), des segments égaux $Pb$, $Pb'$ dont la longueur commune soit égale à ce rayon vecteur multiplié par la constante $k'$ : nous obtiendrons un nouveau couple (V), (V') formé des surfaces lieux des points $b$ et $b'$ qui seront, elles aussi, applicables l'une sur l'autre. D'après les propriétés démontrées au n° 886 le plan perpendiculaire sur le milieu de $aa'$ sera tangent en P à $(\Sigma)$ et le plan perpendiculaire sur le milieu de $bb'$ sera tangent en M à (S); la droite MP, tangente commune à (S) et à $(\Sigma)$, sera perpendiculaire à la fois à $aa'$ et à $bb'$. Remarquons d'ailleurs que, si V

désigne l'angle des plans tangents en M et en P aux surfaces (S) et (Σ), on a, d'après les équations (11) du n° 885,

$$\overline{Ma}\,\overline{Pb}\sin V = h\,\overline{MP}, \tag{1}$$

$h$ étant une constante égale au produit de $k$ et de $k'$.

Nous pouvons, d'après cela, énoncer la proposition suivante :

*Lorsqu'on connaît un couple de surfaces* (U), (U′) *applicables l'une sur l'autre, on peut en déduire un couple nouveau par la construction suivante : Le plan perpendiculaire sur le milieu* M *de la droite* $aa'$ *qui joint les points correspondants* $a$, $a'$ *des deux surfaces enveloppe une surface* (Σ) *qu'il touche en un certain point* P; *et la droite* MP, *nécessairement tangente en* P *à la surface* (Σ), *est aussi tangente en* M *à la surface* (S) *lieu du point* M. *Si, sur la parallèle menée par le point* P *à la normale de* (S) *en* M, *on porte de part et d'autre deux segments égaux* P$b$, P$b'$ *dont la longueur commune soit définie par la relation* (1), *les deux surfaces* (V), (V′), *lieux des points* $b$ *et* $b'$, *sont aussi applicables l'une sur l'autre* (¹).

La relation établie par cette proposition entre les deux couples (U), (U′) et (V), (V′) est parfaitement réciproque, de telle manière que la construction indiquée, appliquée au couple (V), (V′), redonnerait le couple primitif. Pour obtenir tous ceux que nous ont fournis les méthodes du Chapitre précédent, il faudra continuer à appliquer la même construction, mais en remplaçant l'une des surfaces (V), (V′) par sa symétrique relative à l'origine des coordonnées.

899. Nous reviendrons plus loin sur les couples de surfaces applicables, qui méritent une étude spéciale. Nous bornant, pour le moment, aux surfaces qui se correspondent avec orthogonalité

---

(¹) Cette élégante proposition se trouve déjà énoncée, bien que d'une maniere incomplète, dans la première Communication de Ribaucour, relative au sujet qui nous occupe : *Sur la théorie de l'application des surfaces les unes sur les autres* (*Bulletin de la Société Philomathique,* 13 novembre 1869) ; Ribaucour l'a rappelée sans la démontrer, mais en donnant son énoncé tout à fait complet, dans son *Étude des Élassoïdes*.

des éléments linéaires, nous allons étudier les cinq couples que les méthodes du Chapitre précédent font dériver du couple primitif (S), ($S_1$).

Parmi ces cinq couples, l'un d'eux mérite une attention particulière : c'est celui qui est formé des surfaces ($\Sigma_2$) et ($A_2$). En effet, *la surface* ($\Sigma_2$) *ne dépend en aucune manière de* ($S_1$), puisqu'elle est simplement la polaire réciproque de (S) par rapport à la sphère de rayon $i$ qui a l'origine pour centre. Par suite, *on déduira de toutes les surfaces* ($S_1$) *qui correspondent aux différentes déformations infiniment petites de* (S) *toutes les surfaces* ($A_2$) *qui définissent de même les déformations infiniment petites de* ($\Sigma_2$). Ainsi

*Quand on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une surface donnée, on sait résoudre ce même problème pour sa polaire réciproque relative à une sphère.*

900. Cette proposition n'est qu'un cas particulier de la suivante que nous allons établir dans toute sa généralité :

*Quand on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une surface donnée, on sait résoudre ce même problème pour toutes les surfaces nouvelles qui en dérivent par l'homographie ou la corrélation les plus générales.*

En effet, commençons par considérer les transformations homographiques qui conservent le plan de l'infini et qui sont définies par des formules telles que les suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} x' = ax + by + cz + h, \\ y' = a_1x + b_1y + c_1z + h_1, \\ z' = a_2x + b_2y + c_2z + h_2; \end{cases}$$

il est clair que, si l'on définit $x'_1$, $y'_1$, $z'_1$ en fonction de $x_1$, $y_1$, $z_1$ par les relations

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = ax'_1 + a_1y'_1 + a_2z'_1 + k, \\ y_1 = bx'_1 + b_1y'_1 + b_2z'_1 + k_1, \\ z_1 = cx'_1 + c_1y'_1 + c_2z'_1 + k_2, \end{cases}$$

on aura identiquement

$$(4)\qquad dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = dx'\,dx'_1 + dy'\,dy'_1 + dz'\,dz'_1.$$

Par suite, à toute solution de l'équation

$$(5)\qquad dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0,$$

les formules (2) et (3) feront correspondre une solution de l'équation

$$(6)\qquad dx'\,dx'_1 + dy'\,dy'_1 + dz'\,dz'_1 = 0,$$

et *vice versa*. C'est la démonstration du théorème que nous avons en vue *pour le cas spécial où l'on soumet la surface* (S) *à toute transformation homographique qui conserve le plan de l'infini*.

**901.** Considérons maintenant le système

$$(7)\qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy, \\ dy_1 = -r_1\,dx - q\,dz_1, \\ dx_1 = r_1\,dy - p\,dz_1, \end{cases}$$

déjà donné au n° 867, et qui remplace l'équation à vérifier (5); $p$ et $q$ y désignent, nous l'avons vu, les dérivées de $z$ considérée comme fonction de $x$ et de $y$. Employons la transformation déjà mise en usage au n° 885, et introduisons les nouvelles variables

$$(8)\qquad \begin{cases} u = px + qy - z, \\ v = -y_1 - r_1 x - q z_1, \\ w = -r_1 y + p z_1 + x_1. \end{cases}$$

La différentiation nous donnera, en tenant compte des relations (7),

$$(9)\qquad \begin{cases} du = x\,dp + y\,dq, \\ dv = -x\,dr_1 - z_1\,dq, \\ dw = -y\,dr_1 + z_1\,dp, \end{cases}$$

et de là on déduit

$$(10)\qquad du\,dr_1 + dv\,dp + dw\,dq = 0.$$

C'est dire que la surface lieu du point $(p, q, u)$ et la surface lieu du point $(v, w, r_1)$ se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires.

Or, $p$, $q$, $u$ sont les coordonnées du pôle du plan tangent à la surface (S) relativement au paraboloïde défini par l'équation

$$(11) \qquad z = \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Donc, *quand on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une surface* (S), *on sait aussi résoudre le même problème pour la polaire réciproque de* (S) *relativement au paraboloïde défini par l'équation* (11).

Ce cas particulier, ajouté à celui que nous avons déjà étudié dans le numéro précédent, nous suffit pour établir le théorème général que nous avons en vue; car il est aisé de reconnaître que toute transformation homographique et toute transformation corrélative s'obtiennent par l'emploi répété des deux transformations particulières que nous avons considérées.

Ainsi, *à toute solution du problème des éléments rectangulaires ou de la déformation infiniment petite obtenue pour une surface* (S), *on peut faire correspondre, par voie algébrique, une solution pour les surfaces qui dérivent de* (S) *à l'aide de la transformation homographique ou corrélative la plus générale.*

Il est intéressant de voir ainsi s'introduire les propriétés projectives dans le problème de la déformation infiniment petite, alors que le problème de la déformation finie paraît dépendre avant tout des relations métriques.

**902.** Au reste si, pour arriver à la transformation homographique la plus générale, on ne veut pas employer l'intermédiaire d'une transformation par polaires réciproques, on pourra joindre à l'homographie que nous avons étudiée en premier lieu celle qui est définie par les formules suivantes :

$$(12) \qquad x' = \frac{x}{z}, \qquad y' = \frac{y}{z}, \qquad z' = \frac{1}{z}.$$

On verra facilement que, si l'on pose

$$(13) \qquad x'_1 = \frac{x_1}{z}, \qquad y'_1 = \frac{y_1}{z}, \qquad z'_1 = -\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{z},$$

on aura la relation

$$(14)\quad dx'\,dx'_1 + dy'\,dy'_1 + dz'\,dz'_1 = \frac{1}{z^2}(dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1),$$

qui établit encore, pour ce cas spécial, la proposition que nous avons en vue. La transformation définie par les formules (12) et (13) est un cas limite de celle que nous allons étudier, ainsi que nous le montrerons au n° 908. Mais c'est un résultat bien connu qu'en combinant les homographies définies par les deux systèmes (12) et (2) on arrivera à l'homographie la plus générale.

903. Si l'on étudie attentivement le second Tableau donné plus haut [p. 72] on y verra que toujours une surface déterminée y est accompagnée d'une même surface. Ainsi, dans chacune des places où se trouve (S) on rencontre ($S_2$); de sorte que les trois réseaux de courbes désignés respectivement par les chiffres romains I, II et III jouent le même rôle sur (S) et sur ($S_2$). Par exemple, comme les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces, on voit qu'à tout réseau conjugué tracé sur (S) correspond un réseau conjugué tracé sur ($S_2$). La relation est de même nature entre ($S_1$) et ($S_3$). Étudions la transformation par laquelle on déduit directement ($S_2$), ($S_3$) de (S) et de ($S_1$).

Elle est définie par les formules

$$(15)\qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_3}{x} = \frac{y_3}{y} = \frac{z_3}{z} = \frac{-1}{xx_1 + yy_1 + zz_1}:$$

elle est donc *purement ponctuelle;* c'est-à-dire qu'elle fait correspondre aux deux points $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ de (S) et de ($S_1$) deux points $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ de ($S_2$) et de ($S_3$) dont les coordonnées dépendent seulement de celles de M et de $M_1$. Mais elle offre un autre caractère sur lequel il importe d'insister : les coordonnées de $M_2$ dépendent, à la fois, de celles de M et de celles de $M_1$ ; de sorte que la transformation s'applique, non à des points isolés, mais *à des couples de points.* On peut bien faire correspondre $M_2$ à M et $M_3$ à $M_1$, mais $M_2$ variera si $M_1$ varie, alors même que M resterait fixe.

Comme la transformation se réduit à l'inversion ordinaire, quand les deux points M et $M_1$ coïncident, nous lui donnerons le

nom d'*inversion composée*. Pour l'étudier, nous écrirons les formules précédentes sous la forme un peu plus générale

$$(16) \qquad \frac{x'}{x_1} = \frac{y'}{y_1} = \frac{z'}{z_1} = \frac{x'_1}{x} = \frac{y'_1}{y} = \frac{z'_1}{z} = \frac{k^2}{xx_1 + yy_1 + zz_1},$$

qui fait correspondre aux points M, $M_1$ des points $(x', y', z')$, $(x'_1, y'_1, z'_1)$, désignés maintenant par M', $M'_1$.

Des formules précédentes on déduit la suivante

$$(17) \qquad x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1 = \frac{k^4}{xx_1 + yy_1 + zz_1};$$

d'où il résulte immédiatement que la transformation est *involutive*. Si au couple M, $M_1$ correspond le couple M', $M'_1$, réciproquement à M', $M'_1$ correspondront M, $M_1$.

C'est ce qui résulte aussi de la construction géométrique suivante des points M', $M'_1$. Soit O l'origine des coordonnées que nous appellerons aussi, par analogie, le *pôle de l'inversion*, P la projection de $M_1$ sur OM, $P_1$ la projection de M sur $OM_1$. Le point M' sera sur le rayon $OM_1$ à une distance du point O définie par la relation

$$(18) \qquad OM'.OP_1 = k^2$$

et, de même, le point $M'_1$ sera sur OM à une distance définie par la relation

$$(19) \qquad OM'_1\, OP = k^2.$$

En d'autres termes, M' sera le pôle, par rapport à la sphère de rayon $k$, du plan mené par le point M perpendiculairement au rayon vecteur $OM_1$ et de même $M'_1$ sera le pôle du plan mené par $M_1$ perpendiculairement au rayon vecteur OM.

Voici maintenant quelle est la propriété fondamentale de la transformation. Associons au couple M, $M_1$ un second couple N, $N_1$ auquel correspondront les deux points N', $N'_1$; on aura la relation géométrique

$$(20) \qquad \text{[illegible]} \cos(\overline{M'N', M'_1N'_1}) = \frac{k^4\, \overline{MN}\, \overline{M_1N_1} \cos(\overline{MN, M_1N_1})}{\overline{OM}\, \overline{ON}\, \overline{OM_1}\, \overline{ON_1} \cos \widehat{MOM_1} \cos \widehat{NON_1}}.$$

Si l'on désigne, en effet, par $\xi, \eta, \zeta$; $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$; $\xi', \eta', \zeta'$;

$\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$ les coordonnées des points N, $N_1$, N', $N'_1$ cette relation géométrique se traduit par l'égalité

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x'-\xi')(x'_1-\xi'_1)+(y'-\eta')(y'_1-\eta'_1)+(z'-\zeta')(z'_1-\zeta'_1) \\ &\quad = k^4 \frac{(x-\xi)(x_1-\xi_1)+(y-\eta)(y_1-\eta_1)+(z-\zeta)(z_1-\zeta_1)}{(xx_1+yy_1+zz_1)(\xi\xi_1+\eta\eta_1+\zeta\zeta_1)} \end{aligned} \right.$$

dont la vérification se fait presque immédiatement. Il suit de là que, si les deux segments $MM_1$, $NN_1$ sont tels que MN soit perpendiculaire à $M_1N_1$, il en sera de même pour les segments transformés.

Si l'on suppose que le segment $NN_1$ soit infiniment voisin de $MM_1$, en posant $\xi = x + dx, \ldots, \xi_1 = x_1 + dx_1, \ldots,$ l'égalité précédente nous donnera

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} &dx'\,dx'_1 + dy'\,dy'_1 + dz'\,dz'_1 \\ &\quad = \frac{k^4}{(xx_1+yy_1+zz_1)^2}(dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1), \end{aligned} \right.$$

et l'on reconnaît ainsi que l'inversion composée conserve toute correspondance entre deux surfaces qui a lieu avec orthogonalité des éléments linéaires infiniment petits.

**904.** Les résultats que nous avons établis relativement aux douze surfaces nous révèlent encore une propriété remarquable de l'inversion composée. D'après la troisième colonne du Tableau de la page 71 on voit que *la surface* $(S_2)$ *est la polaire réciproque de la surface* $(\Sigma)$. Or nous avons établi (n° 886) que l'on saura résoudre par des quadratures le problème de la déformation infiniment petite pour $(\Sigma)$ dès qu'on saura résoudre ce problème pour (S); $(S_2)$ étant la polaire réciproque de $(\Sigma)$, on peut donc énoncer la proposition suivante :

*Dès qu'on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une surface* (S), *on sait aussi le résoudre par de simples quadratures pour la surface* $(S_2)$ *qui en dérive si on applique l'inversion composée au couple formé de* (S) *et de toute surface* $(S_1)$ *qui lui correspond avec orthogonalité des éléments linéaires infiniment petits.*

**905.** Revenant à l'ensemble de nos douze surfaces, nous voyons

qu'il résulte des propositions précédentes que l'on saura résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour les quatre surfaces (S), ($\Sigma$), ($S_2$), ($\Sigma_2$), dont les lignes asymptotiques sont formées par le réseau I, dès qu'on saura le résoudre pour l'une d'elles. La première de ces surfaces est définie par les formules (1), [p. 49], où $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sont trois solutions particulières de l'équation (2) [p. 49]. Pour obtenir la seconde ($\Sigma$), il faudrait, nous l'avons vu au n° 886, remplacer $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ respectivement par $\frac{x_1}{\omega}$, $\frac{y_1}{\omega}$, $\frac{z_1}{\omega}$, et l'équation à invariants égaux correspondant à cette surface admettrait la solution $\frac{1}{\omega}$. Un calcul facile montrera de même que, pour obtenir la polaire réciproque ($\Sigma_2$) de (S), il faudrait remplacer $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ par

$$(23)\quad \theta'_1 = \frac{x}{\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z}, \quad \theta'_2 = \frac{y}{\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z}, \quad \theta'_3 = \frac{z}{\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z}$$

et l'équation correspondante admettra la solution

$$(24)\qquad \omega'_1 = -\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z}.$$

Enfin, pour la surface ($S_2$), les nouvelles valeurs de $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ seraient

$$(25)\quad \theta''_1 = \frac{X\omega}{xx_1+yy_1+zz_1}, \quad \theta''_2 = \frac{Y\omega}{xx_1+yy_1+zz_1}, \quad \theta''_3 = \frac{Z\omega}{xx_1+yy_1+zz_1}$$

et l'équation correspondante admettrait la solution

$$(26)\qquad \omega''_1 = -\frac{\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z}{xx_1+yy_1+zz_1}.$$

Ces résultats sont résumés dans le Tableau suivant :

| SURFACES. | $\theta_1$. | $\theta_2$. | $\theta_3$. | $\omega$. |
|---|---|---|---|---|
| (S)....... | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ | $\omega$ |
| ($\Sigma$)....... | $\frac{x_1}{\omega}$ | $\frac{y_1}{\omega}$ | $\frac{z_1}{\omega}$ | $\frac{1}{\omega}$ |
| ($\Sigma_2$)...... | $\frac{x}{\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z}$ | $\frac{y}{\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z}$ | $\frac{z}{\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z}$ | $-\frac{xx_1+yy_1+}{\theta_1 x+\theta_2 y+}$ |
| ($S_2$)...... | $\frac{X\omega}{xx_1+yy_1+zz_1}$ | $\frac{Y\omega}{xx_1+yy_1+zz_1}$ | $\frac{Z\omega}{xx_1+yy_1+zz_1}$ | $-\frac{\theta_1 x+\theta_2 y+}{xx_1+yy_1+}$ |

Les quatre équations à invariants égaux qui correspondent aux quatre surfaces peuvent être intégrées dès que l'on a intégré l'une d'elles. C'est ce qui résulte de l'Analyse précédente et ce que l'on pourrait déduire aussi du théorème de M. Moutard. Mais, tandis que toute déformation infiniment petite de (S) donne sans aucune quadrature, comme nous l'avons vu, une déformation infiniment petite de la polaire réciproque $(\Sigma_2)$, il faudra, au contraire, effectuer des quadratures pour trouver une déformation infiniment petite de l'une ou l'autre des deux surfaces $(\Sigma)$, $(S_2)$, polaires réciproques l'une de l'autre.

**906.** A la transformation homographique, à la transformation par polaires réciproques, à l'inversion composée on peut joindre encore une dernière transformation, celle qui est définie en prenant pour $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ des fonctions linéaires *à coefficients constants* de nouvelles variables $x', y', z', x'_1, y'_1, z'_1$, assujetties à la condition de reproduire, à un facteur constant près, la forme quadratique

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1,$$

c'est-à-dire à donner

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = h(dx'\,dx'_1 + dy'\,dy'_1 + dz'\,dz'_1).$$

Le lecteur, familiarisé avec cette théorie, reconnaîtra sans peine que pour obtenir, de la manière la plus générale, de telles transformations il suffira de soumettre $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega$ à la transformation linéaire et homogène la plus générale, c'est-à-dire de poser

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta'_1 &= h_1\theta_1 + k_1\theta_2 + l_1\theta_3 + m_1\omega,\\ \theta'_2 &= h_2\theta_1 + k_2\theta_2 + l_2\theta_3 + m_2\omega,\\ \theta'_3 &= h_3\theta_1 + k_3\theta_2 + l_3\theta_3 + m_3\omega,\\ \omega' &= h_4\theta_1 + k_4\theta_2 + l_4\theta_3 + m_4\omega; \end{aligned}\right.$$

$h_i, k_i, l_i, m_i$ désignant des constantes quelconques. La surface (S') qui correspond ainsi à (S) aura sa déformation infiniment petite dépendante de la même équation aux dérivées partielles que la surface (S). Cette transformation générale, dont nous ne dirons qu'un mot, comprend évidemment, comme cas particulier, celle que nous avons considérée au n° 900. Remarquons d'ailleurs

qu'elle correspond purement et simplement, d'après les équations (6) du n° 883, à une transformation homographique aussi générale que possible de la surface (A).

907. Nous n'insisterons pas davantage sur toutes ces transformations ; il nous paraît bon cependant de montrer quelle est la véritable origine de l'inversion composée, et comment elle peut être rattachée à quelques notions très familières aux géomètres, relatives aux formes quadratiques dont les coefficients sont constants.

Étant données deux surfaces (S), $(S_1)$, lieux des points $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, posons

$$(28)\quad \begin{cases} \xi = x + x_1, \\ \eta = y + y_1, \\ \zeta = z + z_1, \end{cases} \qquad (29)\quad \begin{cases} \xi_1 = x - x_1, \\ \eta_1 = y - y_1, \\ \zeta_1 = z - z_1. \end{cases}$$

On aura identiquement

$$(30)\quad 4(dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1) = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - d\xi_1^2 - d\eta_1^2 - d\zeta_1^2;$$

de sorte que, si les surfaces (S), $(S_1)$ se correspondent point par point avec orthogonalité des éléments linéaires, les deux surfaces (U), $(U_1)$, lieux des points $a(\xi, \eta, \zeta)$, $a'(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, sont applicables l'une sur l'autre. Cela posé, considérons la forme quadratique

$$(31)\qquad F = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - d\xi_1^2 - d\eta_1^2 - d\zeta_1^2,$$

qui peut être mise sous la forme d'une somme de six carrés :

$$(32)\qquad F = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + (di\xi_1)^2 + (di\eta_1)^2 + (di\zeta_1)^2.$$

Si l'on considère, dans l'espace à six dimensions, le point $\mu$ dont les coordonnées rectangulaires sont

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ i\xi_1,\ i\eta_1,\ i\zeta_1,$$

il sera représenté dans l'espace ordinaire, soit par le couple des points M, $M_1$, soit par celui des points $a$, $a'$. Or la forme F se reproduit lorsqu'on effectue, dans l'espace à six dimensions, un déplacement quelconque, c'est-à-dire lorsqu'on soumet $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $i\xi_1$, $i\eta_1$, $i\zeta_1$ à une substitution linéaire orthogonale quelconque. Elle se reproduit même à un facteur constant près si l'on combine

ce déplacement avec une transformation homothétique arbitraire. Cela donne, dans l'espace à trois dimensions, la transformation du numéro précédent et l'on voit que la forme F ne cessera pas d'être nulle, après cette transformation, si elle l'était auparavant. Ainsi se trouvent établis les résultats des nos 900 et 906.

Mais la forme F se reproduit aussi, à un facteur près, lorsqu'on soumet les mêmes variables $\xi$, $\eta$, ... à une inversion ; c'est-à-dire lorsqu'on effectue une substitution de la forme

$$(33) \qquad \frac{\xi'}{\xi} = \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\zeta'}{\zeta} = \pm\frac{\xi'_1}{\xi_1} = \pm\frac{\eta'_1}{\eta_1} = \pm\frac{\zeta'_1}{\zeta_1} = \frac{4k^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\xi_1^2-\eta_1^2-\zeta_1^2}.$$

Si donc elle était déjà nulle, elle ne cessera pas de l'être. Par suite, la transformation définie par les formules précédentes transforme un couple de surfaces applicables en un autre couple de même nature.

Si l'on prend partout le signe — et si l'on introduit les variables $x, y, z, x_1, y_1, z_1$, les formules précédentes deviennent

$$(34) \qquad \frac{x'}{x_1} = \frac{y'}{y_1} = \frac{z'}{z_1} = \frac{x'_1}{x} = \frac{y'_1}{y} = \frac{z'_1}{z} = \frac{k^2}{xx_1+yy_1+zz_1}.$$

Ce sont celles que nous avons données au n° 903 et qui conservent la propriété de deux surfaces de se correspondre avec orthogonalité des éléments linéaires.

908. En terminant ce Chapitre, nous montrerons que les formules précédentes comprennent, comme cas-limite, celles qui ont été données au n° 902.

Remarquons d'abord que, dans la forme

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1,$$

on peut toujours remplacer $x_1$ par $ax_1$ et $x$ par $\frac{x+a}{a}$, $a$ désignant une constante. Si l'on remplace en outre $x'$ par $x'-a$ et $k^2$ par $-a$, les formules se présentent sous la forme suivante

$$\frac{x'-a}{ax_1} = \frac{y'}{y_1} = \frac{z'}{z_1} = \frac{x'_1 a}{x+a} = \frac{y'_1}{y} = \frac{z'_1}{z} = \frac{-a}{x_1(x+a)+yy_1+zz_1}.$$

Faisant croître $a$ indéfiniment, on trouvera

$$\frac{y'}{y_1} = \frac{z'}{z_1} = \frac{y'_1}{y} = \frac{z'_1}{z} = x'_1 = -\frac{1}{x_1},$$

puis

$$x' = \lim\left(a - \frac{a^2 x_1}{x_1(x+a) + yy_1 + zz_1}\right) = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{x_1}.$$

On a ainsi

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{x_1}, & x'_1 &= -\frac{1}{x_1}, \\ y' &= -\frac{y_1}{x_1}, & y'_1 &= -\frac{y}{x_1}, \\ z' &= -\frac{z_1}{x_1}, & z'_1 &= -\frac{z}{x_1}. \end{aligned}\right.$$

Aux notations près, c'est le résultat signalé au n° 902.

# CHAPITRE V.

## APPLICATIONS DIVERSES.

Étude du cas particulier où la surface $(S_1)$, qui correspond à (S) avec orthogonalité des éléments linéaires, se réduit à un plan. — Ce que deviennent alors les douze surfaces. — Application à la question suivante : déterminer toutes les congruences rectilignes pour lesquelles la surface moyenne est un plan. — On détermine, parmi ces congruences rectilignes, celles qui sont formées des normales à une surface. — Étude du problème plus étendu : déterminer toutes les surfaces pour lesquelles les développables formées par les normales découpent, sur la développée moyenne, un réseau conjugué. — La solution de ce problème se ramène à la détermination de la déformation infiniment petite des surfaces minima. — Cette détermination se ramène d'ailleurs à l'intégration d'une équation linéaire harmonique. — C'est de la même équation aux dérivées partielles que dépend la détermination des surfaces ayant même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que la surface minima adjointe à la proposée. — Comment on retrouve les surfaces minima dans l'étude de la déformation infiniment petite de la sphère. — Développement des calculs. — Déformation infiniment petite d'une surface à courbure constante négative. — L'une des douze surfaces devient alors une de ces surfaces, considérées en premier lieu par M. Voss, et sur lesquelles il y a un réseau conjugué exclusivement composé de lignes géodésiques. — Étude des développantes de ces surfaces. — Elles constituent l'une des nappes d'une congruence rectiligne pour laquelle les développables correspondent aux lignes de courbure sur les deux nappes de la surface focale. — Démonstration géométrique des théorèmes de M. Guichard, relatifs à ces surfaces. — Le Chapitre se termine par la démonstration d'un lemme dont il a été fait usage dans la démonstration précédente, et qui est susceptible de nombreuses applications à la théorie des congruences rectilignes.

---

909. Nous avons déjà signalé plus haut une solution évidente du problème des éléments rectangulaires : c'est celle où, la surface (S) étant quelconque, la surface $(S_1)$ est un plan. Il est intéressant de rechercher ce que deviennent, dans ce cas spécial, les douze surfaces définies au Chapitre précédent. On a alors

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= a_0 + c_1 y - b_1 z,\\ y_1 &= b_0 + a_1 z - c_1 x,\\ z_1 &= c_0 + b_1 x - a_1 y;\end{aligned}\right.$$

$a_0$, $b_0$, $c_0$; $a_1$, $b_1$, $c_1$ désignant six constantes quelconques. D'après nos tableaux et nos formules, on reconnaît sans peine que les quatre surfaces $(S_1)$, $(A)$, $(S_3)$, $(A_2)$ se réduisent à des plans, tandis que leurs polaires réciproques, les surfaces $(\Sigma_1)$, $(A_1)$, $(\Sigma_3)$, $(A_3)$, se réduisent à des points. Il reste donc à examiner seulement les trois surfaces $(\Sigma)$, $(S_2)$, $(\Sigma_2)$ qui, avec $(S)$, complètent le système cherché. Or, la surface $(\Sigma)$ est, en général, l'enveloppe du plan défini par l'équation

$$x_1(X-x)+y_1(Y-y)+z_1(Z-z)=0, \tag{2}$$

qui devient ici

$$\begin{aligned} a_0(X-x)+b_0(Y-y)+c_0(Z-z)& \\ +a_1(zY-yZ)+b_1(xZ-zX)+c_1(yX-xY)&=0. \end{aligned}$$

Le lecteur reconnaît l'équation du plan formé par toutes les droites qui appartiennent à un complexe linéaire, et passent par le point $(x, y, z)$. La surface $(\Sigma)$ est donc la polaire réciproque de $(S)$ par rapport au complexe linéaire défini par les six constantes $a_0$, $b_0$, $c_0$, $-a_1$, $-b_1$, $-c_1$. C'est un résultat qu'il était aisé de prévoir. Nous savons, en effet, que, dans le cas qui nous occupe, il ne s'agit pas (n° 856) d'une véritable déformation de la surface $(S)$, mais d'un simple déplacement d'ensemble de cette surface. Pour chacun de ses points, la directrice de la déformation devient la direction de la vitesse du point, dans ce déplacement; et le plan perpendiculaire à cette directrice, plan qui enveloppe la surface $(\Sigma)$, n'est autre que le plan du complexe linéaire engendré par toutes les droites qui, dans le déplacement considéré, sont normales à la vitesse d'un de leurs points. Ainsi se trouve confirmée la relation établie par le calcul entre $(S)$ et $(\Sigma)$.

Quant aux surfaces $(S_2)$ et $(\Sigma_2)$, elles sont, d'après le Tableau de la page 71, les polaires réciproques de $(\Sigma)$ et de $(S)$ par rapport à la sphère de rayon $i$ ayant l'origine pour centre. Cela suffit à les définir et à montrer qu'elles sont, entre elles, dans la même relation dualistique que $(S)$ et $(\Sigma)$, pourvu que l'on substitue au complexe linéaire défini plus haut son polaire réciproque par rapport à la sphère de rayon $i$. Les surfaces $(S)$ et $(S_2)$ sont évidemment en relation homographique puisqu'elles sont les polaires réciproques d'une même surface $(\Sigma)$ l'une par rapport à un com-

plexe linéaire, l'autre relativement à une sphère. La même remarque s'applique aux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_2)$, qui sont les polaires réciproques de (S).

Cette solution tout exceptionnelle du problème proposé s'obtient en prenant pour $\omega$ dans les formules (C) [p. 25] une combinaison linéaire à coefficients constants des solutions particulières $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, à savoir

$$\omega = -a_1\theta_1 - b_1\theta_2 - c_1\theta_3. \tag{3}$$

Si le lecteur voulait en déduire des couples de surfaces applicables conformément à la méthode du n° 834, il reconnaîtrait aisément qu'on obtient seulement ainsi deux positions différentes d'une même surface ou deux surfaces symétriques. On peut rattacher cette remarque à un beau théorème de Chasles relatif au solide milieu dans le déplacement fini d'une figure invariable quelconque. Dans un article publié en 1831 ([1]), l'illustre géomètre énonce la proposition suivante :

*Quand on a dans l'espace deux corps parfaitement égaux, et placés d'une manière quelconque, si l'on joint par des droites les points du premier aux points homologues du second, les points milieux de ces droites formeront un second corps solide qui sera tel qu'on pourra lui donner un mouvement infiniment petit dans lequel tous ses points se dirigeraient suivant ces mêmes droites* ([2]).

Il suffit évidemment d'appliquer cette proposition au cas où les deux corps égaux se réduiraient à des surfaces égales pour retrouver le cas particulier de la déformation infiniment petite étudiée au commencement de ce numéro.

---

([1]) CHASLES, *Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entre eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre;* communiquée à la Société Philomathique, séance du 5 février 1831 (*Bulletin de Férussac,* t. XIV, p. 321-326).

([2]) Si les deux corps dont il est question dans le théorème de Chasles, au lieu d'être parfaitement égaux, étaient *symétriques,* le solide milieu se réduirait à un plan.

**910.** Ce cas particulier que nous venons de considérer intervient de la manière la plus simple dans la solution de la question suivante :

*Déterminer toutes les congruences rectilignes pour lesquelles la surface moyenne est un plan.*

Si, en effet, la surface moyenne est un plan, le réseau intercepté sur ce plan par les développables de la congruence est nécessairement conjugué, comme tous les réseaux plans, et il n'y a plus qu'à appliquer la proposition générale des nos 891 et 892 en supposant seulement que la surface $(S_1)$ se réduise à un plan (P).

A cet effet, on prendra arbitrairement la surface (S), et l'on adjoindra au plan (P) une droite fixe $(d)$ perpendiculaire à ce plan. On fera tourner la surface (S) de 90° autour de $(d)$ ; puis on projettera tous ses points sur le plan (P). A chaque point M de la surface primitive (S) correspondra ainsi un point M' du plan (P). La correspondance établie par cette construction sera évidemment telle qu'à tout élément linéaire de (S) corresponde un élément linéaire orthogonal de (P), et l'on reconnaîtra sans peine qu'elle devient la plus générale de toutes celles qui satisfont à cette condition, si, dans la construction, on substitue à (S) une de ses homothétiques par rapport au pied de la droite $(d)$ sur le plan (P).

Si l'on applique maintenant à l'ensemble des deux surfaces (S) et (P) la proposition du n° 892, on voit que, pour obtenir la congruence cherchée, il suffira de mener par chaque point M' du plan (P) une droite qui soit parallèle à la normale menée en M à la surface (S). On peut ajouter que, d'après la proposition générale indiquée au n° 891, les plans focaux de cette droite de la congruence seront perpendiculaires aux tangentes asymptotiques relatives au point correspondant de la surface (S) [1].

**911.** Cette solution générale du problème posé nous conduit

---

[1] Cette construction a été donnée par M. C. Guichard dans une Note : *Sur les congruences dont la surface moyenne est un plan,* insérée en 1892 au tome CXIV des *Comptes rendus,* p. 729. M. Guichard dit aussi quelques mots du cas où les droites de la congruence sont les normales d'une surface.

à examiner le cas particulier où l'on exige, non seulement que la surface moyenne soit un plan, mais aussi que la congruence soit formée des normales à une surface. D'après la construction précédente des plans focaux, il sera nécessaire et suffisant qu'en chaque point de (S) les tangentes asymptotiques soient rectangulaires, c'est-à-dire que (S) *soit une surface minima.*

Ainsi, *pour obtenir toutes les congruences de normales dans lesquelles la surface moyenne est un plan, il suffira d'établir, comme on l'a indiqué plus haut, une correspondance avec orthogonalité des éléments entre une surface minima quelconque et un plan, puis de mener, par chaque point du plan, une droite parallèle à la normale au point correspondant de la surface minima.*

**912.** Plus généralement, proposons-nous le problème suivant: *Déterminer toutes les surfaces pour lesquelles les développables formées par les normales découpent sur la développée moyenne un réseau conjugué.* Nous donnons ici le nom de *développée moyenne* à la surface décrite par le milieu du segment formé sur chaque normale par les deux centres de courbure. Nous allons voir que la solution de cette question est liée à l'étude de la déformation infiniment petite des surfaces minima.

Reportons-nous, en effet, à la construction donnée au n° **891**, et qui nous fait connaître toutes les congruences pour lesquelles les développables découpent sur la surface moyenne un réseau conjugué. Pour que ces congruences soient formées de normales, c'est-à-dire pour que les plans focaux de chaque droite soient rectangulaires, il sera nécessaire et suffisant qu'en chaque point de (S) les tangentes asymptotiques soient rectangulaires, c'est-à-dire que (S) soit une surface minima. Ainsi :

*Pour obtenir la congruence de normales la plus générale dans laquelle les développables découpent sur la surface moyenne un réseau conjugué, il suffira de déterminer la surface la plus générale* ($S_1$) *qui correspond avec orthogonalité des éléments linéaires à une surface minima quelconque; puis de mener par chaque point de* ($S_1$) *une parallèle à la normale au point correspondant de* (S).

913. Cela nous amène à dire quelques mots du problème de la déformation infiniment petite des surfaces minima.

En nous reportant au n° 205, nous reconnaîtrons aisément que, si l'on prend les équations qui définissent une surface minima sous la forme suivante :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= i\int\frac{U^2-1}{U'}\,du - i\int\frac{V^2-1}{V'}\,dv,\\ y &= \int\frac{U^2+1}{U'}\,du + \int\frac{V^2+1}{V'}\,dv,\\ z &= 2i\int\frac{U}{U'}\,du - 2i\int\frac{V}{V'}\,dv,\end{aligned}\right.$$

U, V désignant des fonctions de $u$ et de $v$ respectivement, l'équation différentielle des lignes asymptotiques prendra la forme

$$(5)\qquad du^2 - dv^2 = 0.$$

Les cosinus directeurs de la normale seront ici

$$(6)\qquad c = \frac{U+V}{1+UV},\qquad c' = i\,\frac{V-U}{1+UV},\qquad c'' = \frac{1-UV}{1+UV}.$$

Si, au lieu d'introduire les paramètres

$$(7)\qquad \alpha = u+v,\qquad \beta = u-v$$

des deux familles de lignes asymptotiques, on conserve les variables $u$ et $v$, les trois fonctions $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ considérées au n° 870 auront les expressions suivantes

$$(8)\qquad \theta_1 = \frac{U+V}{\sqrt{U'V'}},\qquad \theta_2 = i\,\frac{V-U}{\sqrt{U'V'}},\qquad \theta_3 = \frac{1-UV}{\sqrt{U'V'}},$$

et elles satisferont à l'équation aux dérivées partielles

$$(9)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \theta\left[\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{U'}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{U'}}} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{V'}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{V'}}}\right],$$

qui remplacera l'équation (19) du n° 870, et qui est celle qu'il faudra intégrer si l'on veut résoudre le problème de la déformation infiniment petite de la surface minima. Or, cette équation

appartient au type de celles que nous avons nommées *harmoniques* [II, p. 193]. Ainsi :

*La détermination de la déformation infiniment petite d'une surface minima quelconque se ramène à l'intégration de l'équation linéaire harmonique la plus générale.*

L'étude des équations harmoniques a été faite au Livre IV, Chap. IX. Nous n'y reviendrons pas ici.

Revenant au problème du numéro précédent, nous nous contenterons seulement d'indiquer comment on détermine les surfaces normales aux droites de chacune des congruences obtenues.

Si l'on pose

$$\theta_4 = \frac{1+UV}{\sqrt{U'V'}}, \tag{10}$$

on aura

$$\theta_4^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2, \tag{11}$$

et l'on reconnaîtra aisément que $\theta_4$ est encore une solution particulière de l'équation (9). Cela posé, la surface normale aux droites de la congruence sera définie par les formules

$$x' = x_1 + \frac{\theta_1}{\theta_4}\xi, \qquad y' = y_1 + \frac{\theta_2}{\theta_4}\xi, \qquad z'' = z_1 + \frac{\theta_3}{\theta_4}\xi, \tag{12}$$

où l'on a

$$\xi = \int \left(\omega\frac{\partial\theta_4}{\partial u} - \theta_4\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)dv + \left(\omega\frac{\partial\theta_4}{\partial v} - \theta_4\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)du; \tag{13}$$

les coordonnées $x_1$, $y_1$, $z_1$ de la surface $(S_1)$ étant définies par les formules analogues

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \int \left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial u} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)dv + \left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial v} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)du, \\ y_1 &= \int \left(\theta_2\frac{\partial\omega}{\partial u} - \omega\frac{\partial\theta_2}{\partial u}\right)dv + \left(\theta_2\frac{\partial\omega}{\partial v} - \omega\frac{\partial\theta_2}{\partial v}\right)du, \\ z_1 &= \int \left(\theta_3\frac{\partial\omega}{\partial u} - \omega\frac{\partial\theta_3}{\partial u}\right)dv + \left(\theta_3\frac{\partial\omega}{\partial v} - \omega\frac{\partial\theta_3}{\partial v}\right)du. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Si l'on veut que la surface moyenne $(S_1)$ se réduise à un plan, on

pourra prendre

$$(15)\qquad \omega = h\theta_3,$$

$h$ désignant une constante quelconque.

**914.** Dans le cas qui nous occupe, il y a lieu de signaler une propriété intéressante du groupe des douze surfaces. D'après la proposition générale qui a été établie au nº 895, la surface que nous avons désignée par $(A_1)$ est la polaire réciproque de la surface $(A)$ par rapport à la sphère de rayon $i$ admettant pour centre l'origine des coordonnées; et elle est, par suite, l'enveloppe du plan dont l'équation est

$$(16)\qquad \theta_1 X + \theta_2 Y + \theta_3 Z + \omega = 0.$$

Elle correspond à la surface minima $(S)$ avec parallélisme des plans tangents, et nous savons, de plus, que les lignes asymptotiques de $(S)$ correspondent à un réseau conjugué de $(A_1)$ (nº 897). Cela posé, introduisons la surface minima $(S')$ qui est l'adjointe de $(S)$ (nº 210). D'après les relations établies entre $(S)$ et $(S')$, nous voyons que la correspondance entre $(S')$ et $(A_1)$ aura lieu avec parallélisme des plans tangents et, de plus, que les lignes de courbure de $(S')$ [correspondant, nous l'avons vu, aux lignes asymptotiques de $(S)$] correspondront à un réseau conjugué de $(A_1)$. Nous concluons de là que *le réseau conjugué commun à $(S')$ et à $(A_1)$ sera formé des lignes de courbure de ces deux surfaces, et qu'elles auront l'une et l'autre la même représentation sphérique de leurs lignes de courbure.* Ainsi :

*Chaque solution du problème de la déformation infiniment petite d'une surface minima fait connaître une surface ayant même représentation sphérique que la surface minima adjointe et vice versa.*

Ces deux problèmes : déformation infiniment petite d'une surface minima, détermination des surfaces ayant même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que l'adjointe à la surface minima, se ramènent l'un à l'autre, et dépendent de la même équation linéaire harmonique. Le lecteur établira aisément ce résultat par l'analyse en remarquant que $\alpha = u + v$ et $\beta = u - v$ sont les paramètres des lignes de courbure de l'adjointe, et appli-

quant à ce cas particulier la solution du problème de la représentation sphérique indiquée au n° 162.

915. On retrouve encore les surfaces minima en étudiant une autre application particulière de nos propositions générales.

Supposons que la surface (S) soit une sphère définie par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{17}$$

et reportons-nous à nos Tableaux [p. 71].

La surface $(\Sigma_2)$ polaire réciproque de (S) sera aussi une sphère, identique à la première; et les deux points homologues de (S) et de $(\Sigma_2)$ seront *diamétralement opposés.*

Les surfaces $(S_1)$ et $(A_2)$ qui correspondent aux deux sphères avec orthogonalité des éléments linéaires seront (n° 863) les *surfaces moyennes de deux congruences isotropes.*

Pour indiquer ce que sont les huit autres surfaces, remarquons que, le système I étant formé des lignes de longueur nulle de (S) et de $(\Sigma_2)$, les réseaux II et III qui lui sont harmoniques sont formés nécessairement, sur chacune de ces sphères, de *lignes orthogonales*. Ces deux réseaux auront leurs invariants ponctuels (ou tangentiels, ce qui est la même chose dans le cas de la sphère et de toute surface du second degré) égaux; et, comme ils sont harmoniques l'un à l'autre, les courbes appartenant à l'un d'eux bissecteront en chaque point l'angle formé par les courbes appartenant à l'autre.

Comme la sphère (S) et la surface $(A_1)$ se correspondent par plans tangents parallèles, le système II, qui est conjugué sur ces deux surfaces, sera nécessairement formé, sur $(A_1)$, des lignes de courbure; et comme, sur $(A_1)$ et sur (S), les tangentes aux courbes du système I sont parallèles aux points correspondants des deux surfaces [1], il en résulte que, sur $(A_1)$, le système I sera néces-

---

[1] En général, si l'on choisit parmi les douze surfaces deux quelconques de celles qui se correspondent par plans tangents parallèles, nous avons vu au n° 893 qu'en des points correspondants de ces deux surfaces les courbes de l'un quelconque des réseaux I, II, III ont leurs tangentes parallèles. Seulement, tandis que, pour l'un d'eux qui est le réseau conjugué commun, les courbes cor-

sairement formé des *lignes de longueur nulle*. Ce système étant conjugué, $(A_1)$ *sera une surface minima;* et la relation entre $(A_1)$ et $(S)$ sera telle que les lignes de longueur nulle se correspondront sur les deux surfaces, les lignes asymptotiques de $(A_1)$ correspondant à un système rectangulaire de $(S)$. Nous retrouvons les propriétés essentielles relatives à la représentation sphérique des surfaces minima.

Le raisonnement précédent s'applique à $(\Sigma_1)$, qui dérive de $(\Sigma_2)$ comme $(A_1)$ de $(S)$. Les deux surfaces minima $(A_1)$, $(\Sigma_1)$ se correspondent avec parallélisme des plans tangents, similitude des éléments infiniment petits; les lignes asymptotiques de l'une correspondent aux lignes de courbure de l'autre. Cela résulte des Tableaux de la page 71. Nous verrons plus loin que ce sont deux surfaces adjointes l'une à l'autre.

La définition des autres surfaces ne présente plus aucune difficulté.

La surface $(\Sigma)$, associée à $(S)$, et la surface $(S_2)$, associée à $(\Sigma_2)$, constituent les deux nappes des surfaces focales de deux congruences pour lesquelles les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes. Par exemple, les lignes asymptotiques de $(\Sigma)$ correspondent aux génératrices rectilignes de la sphère $(S)$.

Les surfaces $(A)$ et $(S_3)$ sont, d'après les Tableaux, des polaires réciproques de surfaces minima. Enfin, les surfaces $(\Sigma_3)$ et $(A_3)$ sont les polaires réciproques des surfaces moyennes de deux congruences isotropes.

Sur toutes ces surfaces, on saura déterminer les réseaux I, II, III par de simples quadratures.

Si l'on associe la surface moyenne $(S_1)$ à la surface minima $(\Sigma_1)$, on voit qu'elles sont les deux nappes de la surface focale d'une congruence à lignes asymptotiques correspondantes. Ainsi, *les lignes asymptotiques de la surface moyenne* $(S_1)$ *correspondent à celles de la surface minima* $(\Sigma_1)$.

Il ne reste plus qu'à donner les résultats des calculs.

---

respondantes admettent des tangentes parallèles; pour les deux autres, qui sont formés des lignes asymptotiques sur l'une ou sur l'autre des deux surfaces, ce sont les tangentes aux courbes non correspondantes qui sont parallèles (nos 893 et 894).

916. Les coordonnées $x, y, z$ d'un point de la sphère (S) seront définies en fonction des paramètres $\alpha$ et $\beta$ des lignes asymptotiques, c'est-à-dire des lignes de longueur nulle, par les formules si souvent employées

$$(18) \qquad x = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta+1}, \qquad y = i\,\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta+1}, \qquad z = \frac{\alpha\beta-1}{\alpha\beta+1}.$$

Les quantités $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ qui figurent dans le Chapitre précédent et sont reliées aux cosinus directeurs de la normale par les formules (17) du Chapitre II, où $\lambda$ est déterminé par l'équation (27) du même Chapitre, auront ici pour expressions

$$(19) \qquad \theta_1 = x\sqrt{i}, \qquad \theta_2 = y\sqrt{i}, \qquad \theta_3 = z\sqrt{i}.$$

Elles satisferont, comme $x, y, z$, à l'équation du second ordre

$$(20) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{-2\theta}{(1+\alpha\beta)^2}.$$

Si on les porte dans les formules de M. Lelieuvre, elles donneront naissance aux identités

$$(21) \quad \begin{cases} y\dfrac{\partial z}{\partial\alpha} - z\dfrac{\partial y}{\partial\alpha} = -i\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}, \\ z\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} - x\dfrac{\partial z}{\partial\alpha} = -i\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}, \\ x\dfrac{\partial y}{\partial\alpha} - y\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} = -i\dfrac{\partial z}{\partial\alpha}, \end{cases} \qquad (22) \quad \begin{cases} y\dfrac{\partial z}{\partial\beta} - z\dfrac{\partial y}{\partial\beta} = i\dfrac{\partial x}{\partial\beta}, \\ z\dfrac{\partial x}{\partial\beta} - x\dfrac{\partial z}{\partial\beta} = i\dfrac{\partial y}{\partial\beta}, \\ x\dfrac{\partial y}{\partial\beta} - y\dfrac{\partial x}{\partial\beta} = i\dfrac{\partial z}{\partial\beta}, \end{cases}$$

auxquelles on peut joindre les suivantes, qui s'en déduisent immédiatement par différentiation,

$$(23) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial\alpha}\dfrac{\partial z}{\partial\beta} - \dfrac{\partial y}{\partial\beta}\dfrac{\partial z}{\partial\alpha} = -\dfrac{2ix}{(1+\alpha\beta)^2}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial\alpha}\dfrac{\partial x}{\partial\beta} - \dfrac{\partial z}{\partial\beta}\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} = -\dfrac{2iy}{(1+\alpha\beta)^2}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial\alpha}\dfrac{\partial y}{\partial\beta} - \dfrac{\partial x}{\partial\beta}\dfrac{\partial y}{\partial\alpha} = -\dfrac{2iz}{(1+\alpha\beta)^2}. \end{cases}$$

Remarquons encore que $x, y, z$ sont des solutions particulières

des deux équations

$$(24)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}+\frac{2\beta}{1+\alpha\beta}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=0,$$

$$(25)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}+\frac{2\alpha}{1+\alpha\beta}\frac{\partial\theta}{\partial\beta}=0,$$

ce qui permet de simplifier les calculs.

917. Pour trouver la surface $(S_1)$ qui correspond à la sphère (S) avec orthogonalité des éléments linéaires, il faut d'abord intégrer l'équation aux dérivées partielles (20). L'intégrale générale de cette équation est

$$(26)\qquad \theta=2\frac{\beta\varphi(\alpha)+\alpha\psi(\beta)}{1+\alpha\beta}-\varphi'(\alpha)-\psi'(\beta),$$

$\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ désignant deux fonctions arbitraires. Mais, afin que la surface $(S_1)$ soit réelle lorsque $\varphi$ et $\psi$ sont des fonctions imaginaires conjuguées, nous prendrons pour la solution $\omega$ du Chapitre II, l'expression suivante

$$(27)\qquad \omega=\theta\sqrt{i}.$$

Remarquons les deux relations identiques

$$(28)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}+\frac{2\beta}{1+\alpha\beta}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}=-\varphi'''(\alpha),$$

$$(29)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}+\frac{2\alpha}{1+\alpha\beta}\frac{\partial\theta}{\partial\beta}=-\psi'''(\beta),$$

auxquelles satisfait $\theta$.

Les coordonnées $x_1, y_1, z_1$ de $(S_1)$ sont alors définies par des quadratures telles que la suivante

$$(30)\qquad x_1=i\int\left(x\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-\theta\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)d\alpha-\left(x\frac{\partial\theta}{\partial\beta}-\theta\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)d\beta,$$

quadratures que l'on effectue sans difficulté.

Si l'on pose

$$(31)\qquad \sigma=2i\frac{\beta\varphi(\alpha)-\alpha\psi(\beta)}{1+\alpha\beta}-i\varphi'(\alpha)+i\psi'(\beta),$$

$\sigma$ sera encore une solution de l'équation (20), solution que l'on

déduirait de $\theta$ en y remplaçant respectivement $\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta)$ par $i\varphi(\alpha)$ et $-i\psi(\beta)$. On trouvera

(32)
$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \sigma x + 2i\varphi\frac{\partial x}{\partial\alpha} - 2i\psi\frac{\partial x}{\partial\beta} = i(\psi'-\varphi')x + \frac{2i(\varphi-\psi)}{1+\alpha\beta},\\ y_1 &= \sigma y + 2i\varphi\frac{\partial y}{\partial\alpha} - 2i\psi\frac{\partial y}{\partial\beta} = i(\psi'-\varphi')y + 2\frac{\varphi+\psi}{1+\alpha\beta},\\ z_1 &= \sigma z + 2i\varphi\frac{\partial z}{\partial\alpha} - 2i\psi\frac{\partial z}{\partial\beta} = i(\psi'-\varphi')z + 2i\frac{\beta\varphi-\alpha\psi}{1+\alpha\beta}.\end{aligned}\right.$$

On a vu que $(S_1)$ est la surface moyenne d'une congruence isotrope (n° 863). Les plans focaux de cette congruence seraient définis ici par les équations

(33)
$$\left\{\begin{aligned} (1-\alpha^2)x_1 + i(1+\alpha^2)y_1 + 2\alpha z_1 &= 4i\varphi(\alpha),\\ (1-\beta^2)x_1 - i(1+\beta^2)y_1 + 2\beta z_1 &= -4i\psi(\beta).\end{aligned}\right.$$

Après $(S_1)$, toutes les autres surfaces s'obtiennent sans aucune quadrature. Les coordonnées $a$, $b$, $c$ d'un point de (A) ont pour expressions

(34)
$$a = \frac{x}{\theta},\qquad b = \frac{y}{\theta},\qquad c = \frac{z}{\theta}.$$

La polaire réciproque $(A_1)$ de (A) est définie par les formules

(35)
$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= -\theta x - \frac{(1+\alpha\beta)^2}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}\right),\\ b_1 &= -\theta y - \frac{(1+\alpha\beta)^2}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}\right),\\ c_1 &= -\theta z - \frac{(1+\alpha\beta)^2}{2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\beta}\frac{\partial z}{\partial\alpha} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right),\end{aligned}\right.$$

ou, en développant les calculs,

(35')
$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{1-\alpha^2}{2}\varphi'' + \alpha\varphi' - \varphi + \frac{1-\beta^2}{2}\psi'' + \beta\psi' - \psi,\\ b_1 &= i\left(\frac{1+\alpha^2}{2}\varphi'' - \alpha\varphi' + \varphi\right) - i\left(\frac{1+\beta^2}{2}\psi'' - \beta\psi' + \psi\right),\\ c_1 &= \alpha\varphi'' - \varphi' + \beta\psi'' - \psi'.\end{aligned}\right.$$

On trouvera de même, pour les coordonnées d'un point de $(\Sigma)$

les expressions

$$(36)\quad \begin{cases} X = x + \dfrac{2\varphi}{\theta}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + \dfrac{2\psi}{\theta}\dfrac{\partial x}{\partial \beta}, \\[2ex] Y = y + \dfrac{2\varphi}{\theta}\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} + \dfrac{2\psi}{\theta}\dfrac{\partial y}{\partial \beta}, \\[2ex] Z = z + \dfrac{2\varphi}{\theta}\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} + \dfrac{2\psi}{\theta}\dfrac{\partial z}{\partial \beta}, \end{cases}$$

et pour celles du point $(X_1, Y_1, Z_1)$ de $(\Sigma_1)$

$$(37)\quad \begin{cases} X_1 = \sigma x + \dfrac{(1+\alpha\beta)^2}{2}\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial \beta}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \sigma}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x}{\partial \beta}\right), \\[2ex] Y_1 = \sigma y + \dfrac{(1+\alpha\beta)^2}{2}\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial \beta}\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \sigma}{\partial \alpha}\dfrac{\partial y}{\partial \beta}\right), \\[2ex] Z_1 = \sigma z + \dfrac{(1+\alpha\beta)^2}{2}\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial \beta}\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \sigma}{\partial \alpha}\dfrac{\partial z}{\partial \beta}\right), \end{cases}$$

ou encore

$$(37')\quad \begin{cases} X_1 = -i\dfrac{1-\alpha^2}{2}\varphi'' - i\alpha\varphi' + i\varphi + i\dfrac{1-\beta^2}{2}\psi'' + i\beta\psi' - i\psi, \\[2ex] Y_1 = \dfrac{\alpha^2+1}{2}\varphi'' - \alpha\varphi' + \varphi + \dfrac{\beta^2+1}{2}\psi'' - \beta\psi' + \psi, \\[2ex] Z_1 = i(-\alpha\varphi'' + \varphi' + \beta\psi'' - \psi'), \end{cases}$$

ces valeurs se déduisant de celles de $a_1$, $b_1$, $c_1$ où l'on remplacera $\theta$ par $-\sigma$, c'est-à-dire $\varphi$ et $\psi$ par $-i\varphi$ et $i\psi$.

On trouve ensuite, pour les autres surfaces, les formules suivantes

$$(A_2)\quad \begin{cases} a_2 = -X\theta = -x\theta - 2\varphi\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} - 2\psi\dfrac{\partial x}{\partial \beta}, \\[2ex] b_2 = -Y\theta = -y\theta - 2\varphi\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} - 2\psi\dfrac{\partial y}{\partial \beta}, \\[2ex] c_2 = -Z\theta = -z\theta - 2\varphi\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} - 2\psi\dfrac{\partial z}{\partial \beta}, \end{cases} \qquad (\Sigma_2)\quad \begin{cases} X_2 = -x, \\ Y_2 = -y, \\ Z_2 = -z, \end{cases}$$

$$(\Sigma_3)\quad \begin{cases} X_3 = -\dfrac{a_1}{h_1}, \\[2ex] Y_3 = -\dfrac{b_1}{h_1}, \\[2ex] Z_3 = -\dfrac{c_1}{h_1}, \end{cases} \qquad (A_3)\quad \begin{cases} a_3 = -\dfrac{X_1}{h_1}, \\[2ex] b_3 = -\dfrac{Y_1}{h_1}, \\[2ex] c_3 = -\dfrac{Z_1}{h_1} \end{cases}$$

et

$$(S_2)\quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{x_1}{\sigma} = -x - \dfrac{2i\varphi}{\sigma}\dfrac{\partial r}{\partial\alpha} + \dfrac{2i\psi}{\sigma}\dfrac{\partial x}{\partial\beta}, \\ y_2 = -\dfrac{y_1}{\sigma} = -y - \dfrac{2i\varphi}{\sigma}\dfrac{\partial y}{\partial\alpha} + \dfrac{2i\psi}{\sigma}\dfrac{\partial y}{\partial\beta}, \\ z_2 = -\dfrac{z_1}{\sigma} = -z - \dfrac{2i\varphi}{\sigma}\dfrac{\partial z}{\partial\alpha} + \dfrac{2i\psi}{\sigma}\dfrac{\partial z}{\partial\beta}, \end{cases} \qquad (S_3)\quad \begin{cases} x_3 = -\dfrac{x}{\sigma}, \\ y_3 = -\dfrac{y}{\sigma}, \\ z_3 = -\dfrac{z}{\sigma}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(38)\qquad a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 = h_1 = i(2\varphi\varphi'' - \varphi'^2) - i(2\psi\psi'' - \psi'^2).$$

Signalons encore les identités

$$(39)\qquad ax + by + cz = \frac{1}{\theta}, \qquad xx_1 + yy_1 + zz_1 = \sigma,$$

qui permettent de simplifier les calculs.

918. Nous terminerons ce Chapitre, consacré à des applications, en indiquant plusieurs propositions intéressantes relatives au cas où la surface fondamentale (S) a sa courbure constante et négative. Nous supposerons, comme toujours, que cette courbure totale ait la valeur — 1. En changeant un peu les notations et désignant par $\Omega$ la fonction que nous appelions $\omega$ au n° 879, nous aurons l'équation aux dérivées partielles

$$(40)\qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{1}{2}\sin 2\Omega,$$

$\alpha$ et $\beta$ désignant toujours les paramètres des lignes asymptotiques. Avec ces notations, l'élément linéaire de la surface serait défini par la formule

$$(41)\qquad ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2\cos 2\Omega\, d\alpha\, d\beta,$$

déjà rappelée au même endroit.

Les cosinus directeurs $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ de la normale satisferont maintenant (n° 879) à l'équation aux dérivées partielles

$$(42)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \theta\cos 2\Omega;$$

et si $\theta$ désigne la solution la plus générale de cette dernière équa-

tion, c'est cette solution qu'il faudra substituer à $\omega$ dans les formules (C) [p. 25] pour obtenir la surface la plus générale qui correspond à (S) avec orthogonalité des éléments linéaires.

Considérons ici encore la surface $(A_1)$ qui correspond à (S) avec parallélisme des plans tangents aux points homologues. Cette surface est, nous l'avons déjà remarqué, l'enveloppe du plan défini par l'équation

$$(43) \qquad \theta_1 X + \theta_2 Y + \theta_3 Z + \theta = 0,$$

tout à fait semblable à celle qui a été indiquée au n° 914.

Nous avons vu d'une manière générale (n° 897) que les lignes qui, sur $(A_1)$, correspondent aux lignes asymptotiques de (S) forment dans tous les cas un réseau conjugué de $(A_1)$. Nous allons démontrer qu'ici *ce réseau est entièrement formé de lignes géodésiques.*

En effet, pour obtenir le point de $(A_1)$, il faut adjoindre à l'équation précédente ses deux dérivées par rapport à $\alpha$ et à $\beta$

$$(44) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} X + \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} Y + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\alpha} Z + \dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha} = 0, \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\beta} X + \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\beta} Y + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\beta} Z + \dfrac{\partial\theta}{\partial\beta} = 0. \end{cases}$$

On peut joindre à ces équations les suivantes, bien souvent rappelées,

$$(45) \qquad \begin{cases} S\, \theta_1 \dfrac{\partial X}{\partial\alpha} = 0, & S\, \theta_1 \dfrac{\partial X}{\partial\beta} = 0, \\ S \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\beta} \dfrac{\partial X}{\partial\alpha} = 0, & S \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} \dfrac{\partial X}{\partial\beta} = 0, \end{cases}$$

où $S$ désigne le signe de Lamé. Différentions la dernière par rapport à $\beta$; nous aurons

$$S \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} \frac{\partial^2 X}{\partial\beta^2} + S \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} \frac{\partial X}{\partial\beta} = 0.$$

La deuxième somme est nulle; on le reconnaît immédiatement en remplaçant les dérivées secondes de $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ par leurs valeurs déduites de l'équation (42). Il reste donc la relation

$$(46) \qquad S \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} \frac{\partial^2 X}{\partial\beta^2} = 0.$$

Cette relation, rapprochée de la dernière des équations (45), montre que la droite dont les paramètres directeurs sont

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}$$

est normale à deux tangentes consécutives de la courbe de paramètre $\alpha$ tracée sur $(A_1)$. *C'est donc la normale au plan osculateur de cette courbe.*

Mais, comme on a

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1, \tag{47}$$

et, par suite,

$$\theta_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} + \theta_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} + \theta_3 \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha} = 0,$$

on reconnaît immédiatement, *dans le cas spécial qui nous occupe,* que cette normale est parallèle au plan tangent de $(A_1)$. Donc *toute courbe de paramètre* $\alpha$, *tracée sur* $(A_1)$, *est une ligne géodésique de* $(A_1)$.

Comme rien ne distingue les paramètres $\alpha$ et $\beta$, la démonstration s'applique aussi aux courbes de paramètre $\beta$.

**919.** Les surfaces qui jouissent de cette propriété d'admettre un réseau conjugué formé de lignes géodésiques ont été considérées en premier lieu par M. Voss ([1]). On pourra consulter aussi sur ce sujet un important Mémoire de M. Guichard que nous avons déjà cité [p. 40] et sur lequel nous reviendrons plus loin [p. 105].

Réciproquement, proposons-nous de déterminer toutes les surfaces (V) jouissant de la propriété précédente. Désignons maintenant par $\alpha$, $\beta$ les paramètres du système conjugué formé de lignes géodésiques et supposons que $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ soient les cosinus directeurs de la normale à la surface. Alors on aura

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1, \tag{48}$$

---

([1]) A. Voss, *Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden* (*Sitzungsberichte der K. Akademie zu München,* mars 1888).

et la surface cherchée sera l'enveloppe d'un plan défini par une équation de la forme

$$\theta_1 X + \theta_2 Y + \theta_3 Z + \theta = 0, \tag{49}$$

où $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sont des solutions particulières d'une certaine équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} + A \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + B \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + C\theta = 0, \tag{50}$$

A, B, C désignant des fonctions de $\alpha$ et de $\beta$. On aura toujours les relations

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{S}\, \theta_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} = 0, & \mathrm{S}\, \theta_1 \dfrac{\partial X}{\partial \alpha} = 0, & \mathrm{S}\, \theta_1 \dfrac{\partial X}{\partial \beta} = 0, \\ \mathrm{S}\, \theta_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial \beta} = 0, & \mathrm{S} \dfrac{\partial \theta_1}{\partial \beta} \dfrac{\partial X}{\partial \alpha} = 0, & \mathrm{S} \dfrac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} \dfrac{\partial X}{\partial \beta} = 0, \end{array}\right. \tag{51}$$

qui s'appliquent dans tous les cas.

Pour exprimer que la ligne de paramètre $\alpha$ est géodésique, il faut écrire que la droite définie par les paramètres directeurs

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha},$$

droite qui est parallèle au plan tangent et qui est normale à la tangente de la courbe, est aussi normale à la tangente consécutive, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathrm{S} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 X}{\partial \beta^2} = 0. \tag{52}$$

D'après cela, différentions la dernière des relations (51) par rapport à $\beta$, on voit que la relation précédente pourra être remplacée par la suivante

$$\mathrm{S} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \alpha\, \partial \beta} \frac{\partial X}{\partial \beta} = 0,$$

ou, en remplaçant $\dfrac{\partial^2 \theta_1}{\partial \alpha\, \partial \beta}$ et les deux dérivées analogues par leurs valeurs déduites de l'équation (50) et tenant compte des relations précédentes

$$B\, \mathrm{S} \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} \frac{\partial X}{\partial \beta} = 0.$$

Le coefficient de B ne saurait être nul, puisque les courbes de paramètre $\alpha$ ne sont pas des lignes asymptotiques. On a donc

$$B = 0.$$

En considérant de même les courbes de paramètre $\beta$, on trouverait

$$A = 0.$$

Donc $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ satisfont à une équation de la forme

$$(53) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = k\theta,$$

ce qui caractérise les cosinus directeurs d'une surface à courbure constante; et l'on retrouve la génération de la surface qui nous a servi de point de départ.

**920.** Dans le Mémoire auquel nous avons fait allusion plus haut (¹), M. Guichard a ajouté aux résultats précédents une proposition élégante et nouvelle que l'on peut énoncer comme il suit:

Désignons toujours les surfaces précédentes par la lettre (V), et considérons les développantes (G) des surfaces (V), c'est-à-dire les surfaces normales aux tangentes de l'une ou l'autre des deux familles de lignes géodésiques composant le réseau conjugué de (V). Si, par chaque point d'une surface (G), on mène la parallèle à la normale au point correspondant de la surface (V) d'où elle est déduite, cette parallèle, qui sera nécessairement tangente à (G), engendrera une congruence jouissant des propriétés suivantes :

1° Si nous appelons (G) et (G′) les deux nappes de la surface focale, les développables de la congruence correspondront à une ligne de courbure de (G) et à une ligne de courbure de (G′); par suite, les lignes de courbure se correspondront sur (G) et sur (G′), de telle manière que l'arête de rebroussement de l'une des déve-

---

(¹) C. Guichard, *Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. VII, p. 233, août 1890).

loppables de la congruence soit toujours une ligne de courbure de la surface qui la contient.

2° Les lignes de courbure de (G) et de (G′) ou, ce qui est la même chose, les développables de la congruence correspondent aux géodésiques du système conjugué tracé sur la surface (V).

3° Les surfaces (G) obtenues, comme nous l'avons indiqué, au moyen des surfaces (V) sont les plus générales qui jouissent de la première propriété; de sorte qu'il revient au même de chercher les surfaces (G) ou les surfaces (V). On passe des unes aux autres par de simples constructions géométriques.

M. Guichard a établi ces propositions par le calcul; il sera plus instructif de les démontrer par la Géométrie, et de les rattacher à un théorème général dont nous aurons à faire usage plus loin. Voici quel est ce théorème :

*Quand les développables se correspondent sur les congruences engendrées par deux droites parallèles* $(d)$, $(d_1)$: 1° *les plans focaux de* $(d)$ *sont parallèles à ceux de* $(d_1)$; 2° *les droites* $(\delta)$, $(\delta_1)$ *qui joignent les points focaux correspondants de* $(d)$ *et de* $(d_1)$ *se coupent en un point qui est celui où le plan des deux droites* $(d)$, $(d_1)$ *touche la surface* $(\Theta)$ *qu'il enveloppe;* 3° *les deux droites* $(\delta)$, $(\delta_1)$ *sont conjuguées par rapport à la surface* $(\Theta)$; *et les courbes conjuguées qu'elles enveloppent correspondent aux deux familles de développables des congruences considérées.*

Admettons cette proposition que nous démontrerons plus loin et appliquons-la de la manière suivante :

Soient $(G_1)$ et $(G_2)$ deux surfaces admettant (V) pour développée et dont les normales soient tangentes respectivement aux géodésiques des deux familles conjuguées tracées sur (V). Soient $M_1$, $M_2$ les deux points de $(G_1)$ et de $(G_2)$ qui correspondent au même point M de (V) et soient $(d_1)$, $(d_2)$ les normales en $M_1$, $M_2$ au plan $MM_1M_2$, normales qui sont respectivement des tangentes principales de $(G_1)$ et de $(G_2)$. Il est clair que les développables engendrées par les droites parallèles $(d_1)$ et $(d_2)$ se correspondent, puisqu'elles correspondent, les unes et les autres, au système conjugué tracé sur (V); soient $(G_1)$, $(G'_2)$ les deux

nappes focales de la congruence engendrée par $(d_1)$ et $(G_2)$, $(G'_1)$ les deux nappes focales de la congruence engendrée par $(d_2)$.

D'après le théorème précédent, $(G_1)$, $(G'_1)$ se correspondent par parallélisme des plans tangents. Or le système conjugué commun à ces deux surfaces, système évidemment formé des courbes qui correspondent aux développables des congruences engendrées par les droites $(d_1)$ et $(d_2)$, est formé sur $(G_1)$ des lignes de courbure; il en sera donc de même sur $(G'_1)$, puisque, sur ces deux surfaces, les courbes du système conjugué commun ont, à chaque instant, leurs tangentes parallèles.

Donc, *sur les deux nappes focales* $(G'_1)$, $(G_2)$ *de la congruence engendrée par* $(d_2)$, *les lignes de courbure se correspondent et correspondent aux développables de la congruence.*

La démonstration s'étend évidemment à la congruence engendrée par la droite $(d_1)$.

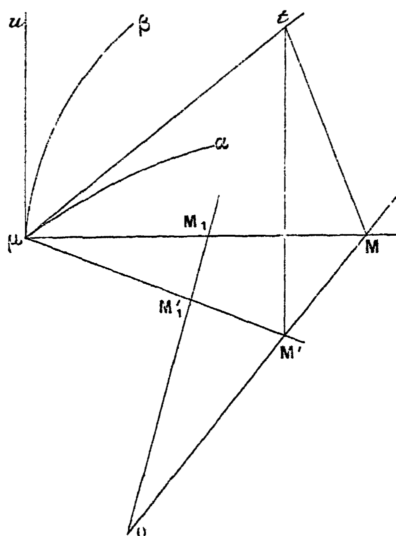
921. Réciproquement, considérons une congruence engendrée par une droite $(d)$, et pour laquelle les lignes de courbure des deux nappes focales correspondent aux développables de la congruence. Soient $(G_1)$, $(G_2)$ les deux nappes décrites par les points focaux de $(d)$. Désignons par $(V_1)$ et $(V_2)$ celles des deux nappes des développées des surfaces précédentes pour lesquelles le plan tangent est normal à $(d)$. Le système conjugué commun à $(V_1)$ et $(V_2)$ est évidemment celui qui correspond sur ces deux nappes aux lignes de courbure de $(G_1)$ ou de $(G_2)$, c'est-à-dire aux développables de la congruence. Or, ce système est formé, nous le savons (n° 426), de deux familles de courbes se correspondant avec parallélisme des tangentes; nous savons aussi que, des deux courbes correspondantes à une même ligne de courbure de $(G_1)$ ou de $(G_2)$, l'une au moins est une développée de ligne de courbure et, par suite, une géodésique de la surface sur laquelle elle est tracée. Il en sera donc de même de l'autre, puisque les tangentes aux points correspondants et, par suite, les plans osculateurs des deux courbes sont parallèles. Donc les deux surfaces $(V_1)$ et $(V_2)$ admettront, l'une et l'autre, un réseau conjugué formé de lignes géodésiques, et ainsi nos propositions se trouvent complètement démontrées.

Elles donnent naissance à plusieurs conséquences, tant analytiques que géométriques. Il nous suffira d'avoir montré comment on peut les rattacher à l'étude de la déformation infiniment petite des surfaces à courbure constante.

Nous terminerons ce Chapitre en donnant la démonstration du théorème sur lequel nous nous sommes appuyé plus haut, et même d'une proposition plus générale.

**922.** Étant donnée une surface $(\Sigma)$, soient $(C)$, $(C')$ deux congruences rectilignes distinctes dont les développables se correspondent et interceptent sur $(\Sigma)$ un même système conjugué. L'ensemble des deux congruences et de la surface $(\Sigma)$ donne lieu aux remarques suivantes.

Fig. 84.




Désignons par $(S)$, $(S_1)$ les deux nappes focales de la congruence $(C)$, par $(S')$, $(S'_1)$ celles de la congruence $(C')$. Soient $\mu$ un point quelconque de $(\Sigma)$ (*fig.* 84); $\mu\alpha$, $\mu\beta$ les deux courbes du système conjugué qui se croisent en $\mu$; $\mu MM_1$ la droite de la congruence $(C)$, dont les points focaux seront $M$, $M_1$; $\mu M'M'_1$ la droite de la congruence $(C')$, dont les points focaux seront $M'$, $M'_1$.

Les nappes $(S)$, $(S')$, $(S_1)$, $(S'_1)$ seront décrites par les points

M, M′, $M_1$, $M'_1$. On peut toujours supposer que les nappes (S), (S′) soient celles dont les plans tangents en M, M′ se coupent suivant la tangente $\mu t$ à la courbe $\mu\alpha$ et alors les plans tangents en $M_1$, $M'_1$ aux nappes ($S_1$), ($S'_1$) se couperont suivant la tangente $\mu u$ à la courbe $\mu\beta$. Cela posé, nous allons démontrer que *le plan des deux droites* $\mu$M, $\mu$M′ *touche son enveloppe* (E) *au point de rencontre* O *des deux droites* MM′, $M_1M'_1$; *que ces deux droites sont des tangentes conjuguées de* (E); *et enfin que les courbes de* (E) *auxquelles elles sont tangentes correspondent aux développables de l'une ou l'autre des deux congruences* (C) *ou* (C′).

En effet, lorsque le point $\mu$ se déplace suivant la courbe $\mu\beta$, les points focaux M, M′ décrivent des courbes respectivement tangentes aux droites $\mu$M, $\mu$M′. Les deux plans tangents en M, M′ à (S) et à (S′) et les deux plans tangents qui leur sont consécutifs ont un point commun. En effet, l'intersection des deux premiers est la droite $\mu t$, l'intersection des deux suivants est la droite consécutive à $\mu t$ quand on se déplace sur la courbe $\mu\beta$. Or, ces deux droites se coupent nécessairement puisque les courbes $\mu\alpha$, $\mu\beta$ sont conjuguées d'après l'hypothèse; et leur point commun sera le point focal $t$, distinct de $\mu$, de la droite $\mu t$ dans la congruence engendrée par cette droite. Donc les quatre plans considérés ont en commun le point $t$. Prenons-les dans un ordre différent : les deux plans tangents consécutifs à la nappe (S) se couperont suivant la conjuguée de M$\mu$ qui sera M$t$ d'après ce qui précède; et de même, pour la nappe (S′), la conjuguée de M′$\mu$ sera M′$t$. Les deux nappes (S), (S′) se trouvent donc dans la relation définie aux nos 423, 424 [II, p. 229 et suiv.]. Les tangentes du système conjugué commun à ces deux nappes concourent, les deux premières en $\mu$, les deux autres en $t$; et, par suite, les développables de la congruence (D) engendrée par la droite MM′ correspondent à celles de (C) ou de (C′). Il en est de même pour la congruence ($D_1$) engendrée par $M_1M'_1$.

Considérons maintenant le plan $\mu$MM′ des deux droites. Quand le point $\mu$ décrit la courbe $\mu\beta$, sa caractéristique est évidemment la droite MM′. De même, quand le point $\mu$ décrit la courbe $\mu\alpha$, la caractéristique du plan est $M_1M'_1$. Donc il touche son enveloppe (E) au point de rencontre O des deux droites.

D'autre part, quand le point $\mu$ décrit la courbe $\mu\beta$, le plan focal de MM' se confondant avec le plan $\mu$MM', le déplacement du point O a lieu nécessairement dans ce plan. Mais le plan focal de $M_1M'_1$ étant distinct de $\mu$MM', le déplacement du point O, qui se fait aussi dans ce second plan focal, ne peut avoir lieu que suivant son intersection $OM_1M'_1$ avec le précédent. Donc, les droites OM, $OM_1$ sont conjuguées par rapport à (E) et les courbes auxquelles elles sont tangentes correspondent bien, comme il a été annoncé, aux développables de l'une ou l'autre des congruences (C) ou (C').

923. Si l'on suppose maintenant que la surface ($\Sigma$) se réduit au plan de l'infini, les deux droites correspondantes des congruences (C) et (C') deviennent parallèles. De plus, tout réseau plan étant nécessairement conjugué, la double condition que nous avons imposée aux développables de (C) et de (C') de se correspondre et de couper la surface ($\Sigma$) suivant les courbes d'un réseau conjugué se réduit à l'unique condition que ces développables se correspondent dans les deux congruences. Les nappes (S), (S') ont leurs plans tangents parallèles ainsi que les nappes ($S_1$), ($S'_1$) et nous retrouvons le théorème dont nous avons fait usage plus haut (n° 920). Nous donnerons plus loin, n$^{os}$ 941 à 944, une démonstration directe et des compléments de ce théorème.

924. Revenons à la proposition générale. Si nous la transformons par polaires réciproques, elle se change dans la suivante :

*Si les développables de deux congruences se correspondent de telle manière que les droites qui joignent les points focaux correspondants soient deux tangentes conjuguées d'une même surface* ($\Sigma'$) *les plans focaux correspondants se coupent suivant deux tangentes conjuguées d'une autre surface* (E'),

qui n'est autre que la réciproque de la proposition primitive.

# CHAPITRE VI.

## ROULEMENT DE DEUX SURFACES L'UNE SUR L'AUTRE.

Rappel des formules données au Livre VII, Chapitre III. — Relations entre les quantités D, D′, D″ de Gauss et les rotations $p$, $q$, $r$, $p_1$, $q_1$, $r_1$. — Roulement d'une surface $(\Theta)$ sur une surface applicable $(\Theta_1)$. — Formules données au Livre I; formules complémentaires. — Comment on peut rattacher à la considération du roulement une nouvelle méthode de recherche des surfaces applicables sur une surface donnée. — Tout mouvement particulier contenu dans le déplacement général se ramène au roulement d'une surface réglée sur une surface de même nature et applicable sur la première. — Premier cas où ces surfaces réglées sont développables. — Extension de la notion de réciprocité relative aux tangentes conjuguées. — Second mouvement particulier dans lequel les surfaces réglées sont développables. — Système conjugué commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$ considéré par Ribaucour. — Théorèmes de M. Kœnigs relatifs à ce système conjugué commun. — La théorie des systèmes cycliques et le théorème fondamental du n° 761 rattachés à la considération du déplacement étudié dans ce Chapitre. — Propriété relative aux congruences engendrées par des droites parallèles et pour lesquelles les développables se correspondent. — Propriétés diverses des différents systèmes cycliques que l'on peut rattacher au même déplacement. — Comment la connaissance d'un couple de surfaces applicables peut conduire à une infinité de couples de surfaces admettant la même représentation sphérique.

---

**925.** Les propositions que nous avons développées dans les Chapitres précédents nous font connaître un nombre illimité de couples de surfaces $(\Theta)$, $(\Theta_1)$ applicables l'une sur l'autre. Or, si l'on considère une de ces surfaces, $(\Theta_1)$ par exemple, comme fixe, on peut toujours amener la seconde $(\Theta)$ à être en contact avec la première, de telle manière que les deux surfaces se touchent par deux points homologues, et que les courbes homologues des deux surfaces qui passent en leur point de contact y admettent la même tangente. On obtiendra ainsi une série de positions de la surface $(\Theta)$, qui dépendront de deux paramètres; et l'on aura ce cas particulier du déplacement à deux variables dont il a été question aux nos 58 et suiv. [I, p. 69 et suiv.]. Le moment est venu d'étudier ce déplacement d'une manière plus complète. Nous rappellerons

d'abord quelques résultats déjà établis au Livre VII, Chap. III [III, p. 242 et suiv.].

Nous avons vu que, si $x$, $y$, $z$ et $c$, $c'$, $c''$ désignent respectivement les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface $(\Theta)$ et les cosinus directeurs de la normale en ce point, ces quantités, considérées comme fonctions des coordonnées curvilignes $u$ et $v$, satisfont à des équations de la forme suivante

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \dfrac{D}{H} c + A \dfrac{\partial x}{\partial u} + A_1 \dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \dfrac{D'}{H} c + B \dfrac{\partial x}{\partial u} + B_1 \dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \dfrac{D''}{H} c + C \dfrac{\partial x}{\partial u} + C_1 \dfrac{\partial x}{\partial v}, \end{cases}$$

et à celles qu'on obtiendrait en y remplaçant $x$ et $c$ par $y$ et $c'$ ou par $z$ et $c''$. Dans ces équations A, $A_1$, B, $B_1$, C, $C_1$ dépendent exclusivement de l'élément linéaire et sont déterminés par les équations suivantes [III, p. 251]

$$(2)\quad \begin{cases} AH^2 = \dfrac{G}{2} \dfrac{\partial E}{\partial u} - F\left(\dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial E}{\partial v}\right), \\ BH^2 = \dfrac{G}{2} \dfrac{\partial E}{\partial v} - \dfrac{F}{2} \dfrac{\partial G}{\partial u}, \\ CH^2 = G\left(\dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial G}{\partial u}\right) - \dfrac{F}{2} \dfrac{\partial G}{\partial v}, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} A_1 H^2 = -\dfrac{F}{2} \dfrac{\partial E}{\partial u} + E\left(\dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial E}{\partial v}\right), \\ B_1 H^2 = -\dfrac{F}{2} \dfrac{\partial E}{\partial v} + \dfrac{E}{2} \dfrac{\partial G}{\partial u}, \\ C_1 H^2 = -F\left(\dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial G}{\partial u}\right) + \dfrac{E}{2} \dfrac{\partial G}{\partial v}. \end{cases}$$

Quant à D, D', D'', ce sont les déterminants définis par les formules (6) [III, p. 244] et qui donnent naissance à l'identité

$$(4)\quad \mathbf{S}\, dc\, dx = -\frac{1}{H}(D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2).$$

**926.** Les relations différentielles entre D, D', D'' sont établies par les formules (24) et (25) [III, p. 248]. On pourrait les déduire aussi du système (1). Car, si l'on retranche la seconde équa-

ion de ce système, différentiée par rapport à $u$, de la première ifférentiée par rapport à $v$, si l'on remplace les dérivées de $c$ par eurs expressions (8) [III, p. 244] et les dérivées secondes de $x$ par eurs valeurs déduites des formules (1) elles-mêmes, on trouvera ıne expression linéaire par rapport à $c$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ dans laquelle les oefficients de ces trois quantités devront évidemment être nuls. En particulier, si on égale à zéro le coefficient de $c$, on aura la remière des relations suivantes

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{H}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D'}{H}\right) + A_1 \dfrac{D''}{H} + (A - B_1)\dfrac{D'}{H} - B\dfrac{D}{H} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D'}{H}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{H}\right) + B_1 \dfrac{D''}{H} + (B - C_1)\dfrac{D'}{H} - C\dfrac{D}{H} = 0, \end{cases}$$

l'où la seconde se déduit par une permutation facile. En dévelop- ant on reconnaîtra aisément que ces formules sont identiques à elles qui ont été données plus haut [III, p. 248].

927. Nous avons déjà remarqué (n° 700) que ces équations, ointes à la formule finie (21) [III, p. 246] peuvent remplacer les ormules de M. Codazzi. Au reste, si l'on veut établir la relation entre le système précédent et celui qui est développé au Livre V, Chap. II, et qui repose sur la considération du déplacement du riède (T), il suffira de remarquer que l'on a

$$6)\quad dx = a(\xi\, du + \xi_1 dv) + b(\eta\, du + \eta_1 dv),$$

$$7)\quad dc = a(q\, du + q_1 dv) - b(p\, du + p_1 dv)$$

et, par suite,

$$8)\quad \mathrm{S}\, dc\, dx = (q\, du + q_1 dv)(\xi\, du + \xi_1 dv) - (p\, du + p_1 dv)(\eta\, du + \eta_1 dv).$$

En comparant à l'équation (4) donnée plus haut, on voit que l'on doit avoir, conformément aux formules (43) [II, p. 378],

$$(9)\quad \begin{cases} D = H(p\eta - q\xi), \\ D' = H(p\eta_1 - q\xi_1) = H(p_1\eta - q_1\xi), \\ D'' = H(p_1\eta_1 - q_1\xi_1) \end{cases}$$

et de là on déduit, comme il fallait s'y attendre,

$$(10)\quad DD'' - D'^2 = H^2(pq_1 - qp_1)(\xi\eta_1 - \eta\xi_1) = (pq_1 - qp_1)(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)^2.$$

Le rapprochement des formules précédentes (4), (8) et de l'équation (17) [II, p. 354] nous montre que l'on aura

$$\frac{ds^2}{\rho_n} = -\mathrm{S}\, dc\, dx = \frac{1}{\mathrm{H}}(\mathrm{D}\, du^2 + 2\mathrm{D}'\, du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2), \tag{11}$$

$\rho_n$ désignant la courbure de la section normale dont la direction est définie par les différentielles $du$, $dv$.

928. Cela étant, revenons au mouvement de la surface $(\Theta)$, qui, d'après les propriétés déjà données au n° 60, peut être défini un roulement de $(\Theta)$ sur $(\Theta_1)$. Nous avons vu que tout déplacement élémentaire de $(\Theta)$ est une rotation autour d'un axe passant par le point de contact, situé dans le plan tangent commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$; et nous avons obtenu les formules suivantes.

Soient $x, y, z$ les coordonnées rectangulaires du *centre instantané*, c'est-à-dire du point de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$, *rapportées à des axes invariablement liés à* $(\Theta)$. Désignons par $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1, \mathrm{R}_1$ les six rotations relatives à ce mouvement. Nous savons (n° 59) qu'en introduisant seulement trois fonctions auxiliaires $\lambda$, $\mu$, $\mu_1$, on peut les exprimer par les formules suivantes

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{P} = -\lambda\dfrac{\partial x}{\partial u} + \mu\dfrac{\partial x}{\partial v}, \\[2mm] \mathrm{Q} = -\lambda\dfrac{\partial y}{\partial u} + \mu\dfrac{\partial y}{\partial v}, \\[2mm] \mathrm{R} = -\lambda\dfrac{\partial z}{\partial u} + \mu\dfrac{\partial z}{\partial v}, \end{cases} \qquad (13)\quad \begin{cases} \mathrm{P}_1 = -\mu_1\dfrac{\partial x}{\partial u} + \lambda\dfrac{\partial x}{\partial v}, \\[2mm] \mathrm{Q}_1 = -\mu_1\dfrac{\partial y}{\partial u} + \lambda\dfrac{\partial y}{\partial v}, \\[2mm] \mathrm{R}_1 = -\mu_1\dfrac{\partial z}{\partial u} + \lambda\dfrac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

Quant aux translations $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$, elles sont définies par les formules

$$(14)\quad \begin{cases} \xi + \mathrm{Q}z - \mathrm{R}y = 0, \\ \eta + \mathrm{R}x - \mathrm{P}z = 0, \\ \zeta + \mathrm{P}y - \mathrm{Q}x = 0, \end{cases} \qquad (15)\quad \begin{cases} \xi_1 + \mathrm{Q}_1 z - \mathrm{R}_1 y = 0, \\ \eta_1 + \mathrm{R}_1 x - \mathrm{P}_1 z = 0, \\ \zeta_1 + \mathrm{P}_1 y - \mathrm{Q}_1 x = 0, \end{cases}$$

par lesquelles on exprime que la vitesse du centre instantané considéré comme appartenant à la surface mobile est nulle dans tout déplacement élémentaire.

Nous avons indiqué au n° 60 que ces formules conduisent à une nouvelle méthode de recherche des surfaces applicables sur une surface donnée. Il est clair en effet que, si l'on donne la surface $(\Theta)$,

la détermination des fonctions $\lambda$, $\mu$, $\mu_1$ entraînera la connaissance de la surface $(\Theta_1)$. Tout se ramène donc à la détermination de ces trois fonctions.

Si l'on porte les valeurs des rotations dans les trois équations

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial P_1}{\partial u} &= QR_1 - RQ_1,\\ \frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{\partial Q_1}{\partial u} &= RP_1 - PR_1,\\ \frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial R_1}{\partial u} &= PQ_1 - QP_1,\end{aligned}\right.$$

les seules qui restent à vérifier, d'après l'analyse du n° 59, on trouve

$$(17)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\mu_1\frac{\partial x}{\partial u} - \lambda\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu\frac{\partial x}{\partial v} - \lambda\frac{\partial x}{\partial u}\right) = (\mu\mu_1 - \lambda^2)Hc$$

et deux équations analogues en $y$ et $z$. Développons et remplaçons les dérivées secondes de $x$ par leurs valeurs (1); puis égalons à zéro les coefficients de $c$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$. On aura les trois équations

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &D\mu_1 - 2D'\lambda + D''\mu - H^2(\mu\mu_1 - \lambda^2) = 0,\\ &\frac{\partial \mu_1}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} + A\mu_1 - 2B\lambda + C\mu \qquad = 0,\\ &\frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} + A_1\mu_1 - 2B_1\lambda + C_1\mu \quad\;\; = 0,\end{aligned}\right.$$

dont l'intégration ferait connaître les valeurs les plus générales de $\lambda$, $\mu$, $\mu_1$.

929. On peut les ramener à une forme beaucoup plus élégante. Pour faire disparaître dans la première les termes du premier degré, posons

$$(19)\qquad \mu = \frac{D - D_1}{H^2}, \qquad \mu_1 = \frac{D'' - D''_1}{H^2}, \qquad \lambda = \frac{D' - D'_1}{H^2},$$

$D_1$, $D'_1$, $D''_1$ étant les inconnues que nous substituons à $\lambda$, $\mu$, $\mu_1$. Après substitution et quelques réductions, on trouve, en tenant

compte du système (5), les équations suivantes

$$(20)\quad \begin{cases} D_1'^2 - D_1 D_1'' = D'^2 - DD'', \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D_1}{H}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D_1'}{H}\right) + A_1 \dfrac{D_1''}{H} + (A - B_1)\dfrac{D_1'}{H} - B\dfrac{D_1}{H} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D_1'}{H}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D_1''}{H}\right) + B_1 \dfrac{D_1''}{H} + (B - C_1)\dfrac{D_1'}{H} - C\dfrac{D_1}{H} = 0, \end{cases}$$

toutes pareilles à celles du système (5); en sorte que $D_1$, $D_1'$, $D_1''$ satisfont aux mêmes équations que $D$, $D'$, $D''$. Nous allons montrer en effet que ce sont les valeurs prises par $D$, $D'$, $D''$ lorsqu'à la surface ($\Theta$) on substitue la surface ($\Theta_1$).

930. Considérons le trièdre (T) que nous avons rattaché à chaque point de ($\Theta$) pour obtenir les formules de M. Codazzi et dont les rotations sont définies par les composantes $p$, $q$, $r$, $p_1$, $q_1$, $r_1$ *relatives aux axes de ce trièdre*. Pour avoir les composantes $P'$, $Q'$, $R'$, $P_1'$, $Q_1'$, $R_1'$ de ces rotations par rapport aux axes choisis dans ce Chapitre, axes qui sont invariablement liés à ($\Theta$), mais quelconques, il faudra employer les formules

$$(21)\quad \begin{cases} P' = ap + bq + cr, \\ Q' = a'p + b'q + c'r, \\ R' = a''p + b''q + c''r; \end{cases} \qquad (22)\quad \begin{cases} P_1' = ap_1 + bq_1 + cr_1, \\ Q_1' = a'p_1 + b'q_1 + c'r_1, \\ R_1' = a''p_1 + b''q_1 + c''r_1. \end{cases}$$

Bornons-nous aux deux premières et remplaçons-y $a$ et $b$ par leurs valeurs déduites des équations

$$(23)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = a\xi + b\eta, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = a\xi_1 + b\eta_1.$$

En tenant compte de ce que l'on a, en grandeur et en signe,

$$(24)\qquad H = \xi\eta_1 - \eta\xi_1$$

et utilisant les relations (9), on trouvera

$$(25)\quad P' = \frac{D'}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v} + cr, \qquad P_1' = \frac{D''}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D'}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v} + cr_1.$$

On aura des formules analogues pour $Q'$, $Q_1'$, $R'$, $R_1'$.

Considérant maintenant le trièdre (T) comme attaché non plus à la surface ($\Theta$), mais à la surface ($\Theta_1$), on trouverait de même pour

ses rotations $P''$, $P''_1$, ... les valeurs

$$(26)\quad P'' = \frac{D'_1}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D_1}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v} + cr, \qquad P''_1 = \frac{D''_1}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{D'_1}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v} + cr_1,$$

$D_1$, $D'_1$, $D''_1$ désignant les valeurs que prennent D, D′, D″ quand on passe à la surface $(\Theta_1)$. Quant à $r$ et $r_1$, *leurs valeurs sont les mêmes,* comme on sait, *dans les deux cas,* puisqu'elles dépendent exclusivement de l'élément linéaire et de la manière dont le trièdre (T) est attaché à la surface.

Cela posé, supposons que $u$ et $v$ prennent des accroissements infiniment petits quelconques et que (T) prenne la position (T′) dans la surface $(\Theta)$ et la position (T″) dans la surface $(\Theta_1)$. Le roulement de $(\Theta)$ sera celui qui amènera le trièdre de sa position (T′) en (T″). Or ce mouvement infiniment petit peut être décomposé en deux : l'un, qui amènera le trièdre de (T′) en (T) et donnera naissance aux rotations $-P'du - P'_1 dv$, ...; l'autre, qui amènera le trièdre de (T) en (T″) et donnera naissance aux rotations $P''du + P''_1 dv$, .... Il suit de là que l'on doit avoir

$$P\,du + P_1\,dv = P''\,du + P''_1\,dv - P'\,du - P'_1\,dv,$$

et par suite

$$P = P'' - P', \qquad P_1 = P''_1 - P'_1,$$

c'est-à-dire

$$(27)\qquad P = -\frac{D' - D'_1}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{D - D_1}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$(28)\qquad P_1 = -\frac{D'' - D''_1}{H^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{D' - D'_1}{H^2}\frac{\partial x}{\partial v},$$

et les expressions analogues pour Q, $Q_1$, R, $R_1$.

On retrouve ainsi les formules (12) et (13), mais avec les valeurs (19) de $\lambda$, $\mu$, $\mu_1$; et la proposition que nous avions en vue est entièrement démontrée.

**931.** Puisque la rotation infiniment petite relative à chaque déplacement a son axe dans le plan tangent, il est clair que l'on peut poser

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} P\,du + P_1\,dv &= \frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v,\\ Q\,du + Q_1\,dv &= \frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v,\\ R\,du + R_1\,dv &= \frac{\partial z}{\partial u}\delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\delta v.\end{aligned}\right.$$

$\delta u$ et $\delta v$ seront les différentielles de $u$ et de $v$, lorsqu'on se déplace suivant l'axe de cette rotation; ils le définiront même en grandeur puisque, d'après les formules précédentes, ils représentent les accroissements de $u$ et de $v$ lorsqu'on passe de l'origine de cet axe infiniment petit à son extrémité.

Or, si l'on remplace P et $P_1$, par exemple, par leurs valeurs déduites des formules (12) et (13), il vient

$$\frac{\partial x}{\partial u}(-\lambda\, du - \mu_1\, dv - \delta u) + \frac{\partial x}{\partial v}(\mu\, du + \lambda\, dv - \delta v) = 0,$$

et, comme cette relation doit être vérifiée quand on y remplace $x$ par $y$ et $z$, il vient nécessairement

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta u &= -\lambda\, du - \mu_1\, dv, \\ \delta v &= \quad \mu\, du + \lambda\, dv. \end{aligned} \right.$$

Ces formules contiennent toutes les relations entre le déplacement du centre instantané et la rotation qui lui correspond. En particulier, si on les divise l'une par l'autre, on obtient l'équation

$$(30) \qquad \mu\, du\, \delta u + \lambda(du\, \delta v + dv\, \delta u) + \mu_1 dv\, \delta v = 0,$$

qui ne contient que les quotients $\frac{du}{dv}$, $\frac{\delta u}{\delta v}$ et se rapporte, par suite, uniquement aux directions de l'axe instantané et du mouvement du centre instantané. Comme l'équation précédente ne change pas lorsqu'on échange les caractéristiques $d$, $\delta$, on voit que *la relation entre ces deux directions est réciproque*. Ainsi se trouve établie la proposition annoncée au n° 60.

**932.** Imaginons maintenant que le centre instantané décrive une courbe (C) de $(\Theta)$. Cette courbe roulera sur la courbe homologue $(C_1)$ de $(\Theta_1)$, et, si l'on considère les deux surfaces réglées lieux des positions successives de l'axe instantané dans le système mobile et dans l'espace, ces deux surfaces (R) et $(R_1)$, respectivement circonscrites à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$ suivant les courbes (C) et $(C_1)$, rouleront l'une sur l'autre dans le déplacement considéré. *Elles seront donc nécessairement applicables l'une sur l'autre.*

Ainsi, la connaissance de tout couple de surfaces applicables l'une sur l'autre entraîne celle d'une infinité de pareils couples

formés avec deux surfaces gauches, et cela sans aucune intégration. Examinons maintenant les cas particuliers.

933. Il peut se faire que la direction de l'axe instantané coïncide avec celle du déplacement du centre instantané. On aura alors

$$du\,\delta v - dv\,\delta u = 0,$$

et l'équation (30) nous donnera

$$\mu\,du^2 + 2\lambda\,du\,dv + \mu_1\,dv^2 = 0. \tag{31}$$

Il y a deux familles de lignes (C) satisfaisant à cette équation différentielle. Si le centre instantané décrit une de ces courbes, le mouvement se réduira au roulement d'une surface développable sur une autre développable; les deux arêtes de rebroussement seront tangentes à chaque instant. Par cela seul qu'il y a roulement autour de la tangente commune, on peut affirmer que les deux arêtes de rebroussement auront, à chaque instant, même plan osculateur et même rayon de courbure.

On peut donc dire que l'équation (31) définit deux directions pour lesquelles deux courbes correspondantes tracées sur les deux surfaces $(\Theta)$, $(\Theta_1)$ ont même courbure ou mieux, comme les courbures géodésiques sont toujours égales, ont même courbure normale. C'est ce que l'on peut vérifier de la manière suivante :

Considérons deux sections normales correspondantes, dans $(\Theta)$ et dans $(\Theta_1)$; et soient $\rho_n$, $\rho'_n$ les rayons de courbure de ces deux sections. En appliquant successivement la formule (11) aux deux surfaces, on aura

$$-\frac{ds^2}{\rho_n} = \frac{1}{H}(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2),$$

$$-\frac{ds^2}{\rho'_n} = \frac{1}{H}(D_1\,du^2 + 2D'_1\,du\,dv + D''_1\,dv^2),$$

et par suite, en vertu des équations (19),

$$ds^2\left(\frac{1}{\rho'_n} - \frac{1}{\rho_n}\right) = H(\mu\,du^2 + 2\lambda\,du\,dv + \mu_1\,dv^2). \tag{32}$$

Cette formule met en évidence la proposition annoncée en

montrant que les courbes définies par l'équation différentielle (31) sur les deux surfaces $(\Theta)$, $(\Theta_1)$ ont leurs courbures normales *égales et de même signe*. Dès à présent, on peut en déduire cette conséquence que ces lignes ne peuvent se confondre avec les lignes asymptotiques de l'une ou de l'autre des surfaces $(\Theta)$, $(\Theta_1)$ que si ces deux surfaces sont symétriques l'une de l'autre. Pour qu'il en soit ainsi, en effet, il faut que $D_1$, $D'_1$, $D''_1$ soient proportionnels à $D$, $D'$, $D''$ et cette condition de proportionnalité jointe à la première des équations (20) entraîne les relations

$$D_1 = -D, \qquad D'_1 = -D', \qquad D''_1 = -D'',$$

qui caractérisent deux surfaces symétriques. Ce cas particulier nous a servi de guide dans l'analyse précédente.

**934.** Il est un autre cas particulier des plus intéressants dans lequel les deux surfaces réglées $(R)$ et $(R_1)$ qui roulent l'une sur l'autre se réduisent à des surfaces développables. Il a été signalé pour la première fois en 1891 par Ribaucour [1].

Supposons que le centre instantané se déplace suivant une courbe $(C_1)$ de la surface $(\Theta_1)$. Pour que l'axe de la rotation instantanée décrive une surface développable, il faut évidemment qu'il coïncide soit avec la tangente à la courbe $(C_1)$ soit avec la conjuguée. Nous venons d'étudier la première hypothèse, examinons maintenant la seconde. Pour qu'elle se réalise, il faudra que les déplacements définis par les caractéristiques $d$ et $\delta$ soient à la fois *réciproques* dans le sens indiqué plus haut et *conjugués* par rapport à $(\Theta_1)$. Mais, si la surface réglée circonscrite à $(\Theta_1)$ se réduit à une développable, elle ne peut rouler que sur une développable et, par suite, les deux déplacements sont conjugués à la fois par rapport à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$. C'est d'ailleurs ce que montre immédiatement l'analyse; les trois équations

$$D\, du\, \delta u + D'(du\, \delta v + dv\, \delta u) + D''\, dv\, \delta v = 0,$$
$$D_1\, du\, \delta u + D'_1(du\, \delta v + dv\, \delta u) + D''_1\, dv\, \delta v = 0,$$
$$\mu\, du\, \delta u + \lambda(du\, \delta v + dv\, \delta u) + \mu_1\, dv\, \delta v = 0,$$

[1] RIBAUCOUR (A.), *Sur les systèmes cycliques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXIII, p. 324; 24 août 1891).

se réduisant nécessairement à deux en vertu des relations (19).

D'après ces relations, ces courbes du système conjugué commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$ se détermineront par l'équation différentielle

$$(33)\qquad \begin{vmatrix} du^2 & du\,dv & dv^2 \\ D'' & -D' & D \\ D''_1 & -D'_1 & D_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Elles ne seront indéterminées que dans le cas où les deux surfaces seront symétriques l'une de l'autre. La double famille qu'elles forment ne se réduira à une famille unique que si les deux surfaces $(\Theta)$, $(\Theta_1)$ sont réglées l'une et l'autre, leurs génératrices rectilignes étant des lignes correspondantes. Toutes ces propriétés peuvent être prévues et démontrées *a priori*. Quand une correspondance, point par point, est établie entre deux surfaces d'ailleurs quelconques $(S)$ et $(S_1)$, il existe, en général, un système conjugué de $(S)$, et un seul, qui correspond à un système conjugué de $(S_1)$. En effet, à tout réseau conjugué de $(S)$ correspond sur $(S_1)$ un système de courbes qui divisent harmoniquement le réseau des lignes correspondantes aux asymptotiques de $(S)$. Si l'on veut qu'elles soient, en outre, conjuguées sur $(S)$, leurs tangentes en chaque point seront pleinement définies par la condition de diviser harmoniquement deux angles, en général distincts. Si les lignes asymptotiques de $(S)$ ne correspondent pas à celles de $(S_1)$, il y aura un réseau répondant à la question et composé de deux familles distinctes, réelles ou imaginaires. Si une famille de lignes asymptotiques de $(S)$ correspond à des lignes asymptotiques de $(S_1)$, le réseau conjugué se réduira à une famille double, formée des asymptotiques qui se correspondent. Enfin, si à toutes les lignes asymptotiques de $(S)$ correspondent les lignes asymptotiques de $(S_1)$, tout réseau conjugué de l'une des surfaces aura pour homologue un réseau conjugué de la seconde [1].

Dans le cas particulier où les surfaces correspondantes sont

---

[1] Dans cet ordre d'idées, le lecteur démontrera facilement la proposition suivante : Quand on connaît les lignes asymptotiques d'une surface $(S)$, on peut la faire correspondre, point par point, à un plan de telle manière que tout réseau orthogonal du plan ait pour homologue un réseau conjugué de la surface; et cela, sans aucune intégration.

applicables l'une sur l'autre, nous avons vu au n° 723 qu'en dehors des cas spéciaux signalés plus haut les lignes asymptotiques ne sont jamais des courbes correspondantes. Donc le système conjugué existera toujours et se composera de deux familles distinctes, réelles ou imaginaires. Ces deux familles auront même cette propriété particulière que les tangentes aux deux courbes qui passent au même point feront le même angle sur les deux surfaces.

Cela posé, soient (C), ($C_1$) deux courbes correspondantes appartenant à l'une ou à l'autre famille et tracées sur les deux surfaces. Les deux développables circonscrites suivant ces courbes aux deux surfaces seront évidemment applicables l'une sur l'autre; car elles ne sont autres que les deux surfaces réglées (R) et ($R_1$) considérées au n° 932. On peut d'ailleurs le reconnaître directement; le lecteur établira sans peine que, pour les deux développables, le segment de la génératrice rectiligne intercepté entre la courbe de contact et l'arête de rebroussement a la même valeur, et de là il déduira que les deux arêtes de rebroussement des développables ont même arc et même rayon de courbure aux points correspondants, ce qui suffit à établir le résultat annoncé.

935. Au sujet de ce système conjugué commun à deux surfaces, M. Kœnigs a fait une remarque très intéressante que nous allons rappeler.

Si l'on prend comme variables les paramètres $u$ et $v$ des deux familles conjuguées qui le composent, on sait que les trois coordonnées cartésiennes des points de chaque surface satisfont à une équation linéaire telle que la suivante

$$(34)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial u} + \beta \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Il devrait donc y avoir deux équations distinctes de cette forme, l'une pour ($\Theta$), l'autre pour ($\Theta_1$). En réalité, *il n'y en a qu'une;* et si l'on suppose d'ailleurs les deux surfaces dans une position relative quelconque, mais fixe, les six coordonnées $x$, $y$, $z$; $x_1$, $y_1$, $z_1$ de deux points correspondants satisfont à une même équation linéaire de la forme précédente. Telle est la proposition de M. Kœnigs.

La démonstration en est d'ailleurs presque immédiate. Elle ré-

sulte de ce que, dans l'équation précédente, $\alpha$ et $\beta$ sont reliés aux coefficients E, F, G de l'élément linéaire par les formules

$$(35) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} + \alpha E + \beta F = 0, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} + \alpha F + \beta G = 0,$$

dont nous avons déjà fait usage.

M. Kœnigs a ajouté que la même équation (34) admet aussi la solution

$$(36) \qquad \theta_1 = x^2 + y^2 + z^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2.$$

Il suffit, en effet, de substituer cette solution et de tenir compte de ce que $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ sont des solutions particulières pour obtenir la condition

$$2\,\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - 2\,\mathrm{S}\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0,$$

qui est évidemment vérifiée. Nous verrons plus loin le parti qu'on peut tirer de ces différentes propriétés.

936. L'emploi du déplacement à deux variables que nous venons d'étudier nous permet de présenter sous une autre forme le théorème fondamental que nous avons démontré au n° 761, relativement aux systèmes cycliques. Considérons d'une manière générale une droite $(d)$ invariablement liée à $(\Theta)$ et entraînée dans le mouvement de cette surface, et soit $m$ son point d'intersection avec le plan de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$. Le point $m$ décrira une certaine surface dont le plan tangent en $m$ sera celui qui projette la droite $(d)$ sur le plan de contact. En effet, tous les déplacements élémentaires étant des rotations autour de droites situées dans le plan de contact, la *vitesse d'entraînement* du point $m$ dans ces déplacements sera toujours la normale à ce plan; quant à sa *vitesse relative*, elle sera dirigée évidemment suivant la droite $(d)$. Le plan tangent cherché devra être normal au plan de contact et passer par la droite $(d)$.

Cela posé, considérons une sphère (S) de rayon nul, ayant son centre en un point M invariablement lié à $(\Theta)$. Elle coupera le plan de contact suivant un cercle (C) dont les positions successives engendreront une congruence. Soit $(d)$ une génératrice rectiligne

*déterminée* de (S); elle coupera le cercle en un point variable $m$; et, d'après la construction du plan tangent que nous venons d'indiquer, la surface (Σ) décrite par le point $m$ sera normale au cercle. C'est le résultat déjà démontré au n° 762.

937. A la famille des surfaces (Σ) normales aux cercles, on doit associer deux autres familles d'enveloppes de sphères formant avec la première un système triple orthogonal (n° 477). Les positions successives du cercle (C) qui engendrent ces deux familles de surfaces correspondent aux deux séries de roulements dans lesquels le centre instantané décrit une des courbes du système conjugué commun à (Θ) et à ($\Theta_1$). Il suffira, pour le démontrer, d'établir que les développables de la congruence engendrée par l'axe du cercle (C) dans ses différentes positions correspondent à ces mêmes courbes conjuguées (n° 472).

Abaissons du point M invariablement lié à (Θ) une perpendiculaire sur le plan de contact de (Θ) et de ($\Theta_1$). Les différentes positions de cette perpendiculaire seront les axes des positions successives du cercle (C). Si l'on se déplace sur la surface ($\Theta_1$), deux positions consécutives de la perpendiculaire seront perpendiculaires à la caractéristique du plan tangent à ($\Theta_1$), c'est-à-dire à la tangente conjuguée de la direction du déplacement. Pour que la perpendiculaire engendre un élément de surface développable, il sera donc nécessaire et suffisant que le déplacement du point M soit, lui aussi, perpendiculaire à cette conjuguée. C'est ce qui aura lieu si cette tangente conjuguée est l'axe de rotation du déplacement, c'est-à-dire si ce déplacement a lieu suivant une des courbes du système conjugué commun à (Θ) et à ($\Theta_1$). Nous obtenons ainsi les deux séries de développables de la congruence et notre proposition est établie.

Au reste, l'analyse en fournit aussi une démonstration des plus simples.

938. Nous avons vu (n° 758) [III, p. 348] que si, de chaque point d'une surface comme centre, on décrit une sphère de rayon variable, les points de contact de cette sphère avec son enveloppe demeurent invariables quand la surface se déforme en demeurant applicable sur elle-même. Par suite, si, du point de contact de (Θ)

et de $(\Theta_1)$ pris comme centre, on décrit une sphère dont le rayon varie suivant une loi quelconque, les points où cette sphère touche son enveloppe sont les mêmes, qu'on la considère, soit comme appartenant à $(\Theta)$, soit comme appartenant à $(\Theta_1)$. En d'autres termes, on obtiendra deux enveloppes de sphères, l'une dans l'espace, l'autre dans le système mobile. Ces deux enveloppes glisseront l'une sur l'autre et seront toujours tangentes en deux points placés symétriquement par rapport au plan de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$.

Considérons, en particulier, une sphère définie dans le système fixe par l'équation

$$(37) \qquad X^2+Y^2+Z^2-2x_1X-2y_1Y-2z_1Z+\theta=0,$$

où $x_1, y_1, z_1$ sont les coordonnées du centre instantané par rapport à des axes fixes et où $\theta$ est une solution *quelconque* de l'équation (34) relative au système conjugué commun. La sphère touche son enveloppe en deux points P, P′ qui sont les mêmes quand on la considère comme faisant partie, soit du système fixe, soit du système mobile; mais la corde de contact PP′ engendre deux congruences distinctes, suivant qu'on la rattache à l'une ou à l'autre des surfaces $(\Theta)$, $(\Theta_1)$. Bien que distinctes, ces congruences ont à chaque instant les mêmes plans focaux; car ces plans focaux doivent être (n° 473) perpendiculaires aux tangentes du système conjugué commun. On peut donc dire que les développables de la congruence engendrée par les droites PP′ se conservent lorsque la surface $(\Theta)$ se déforme en entraînant ces droites de manière à venir coïncider avec $(\Theta_1)$, et elles correspondent aux courbes du système conjugué commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$. Ajoutons toutefois que, si les plans focaux des droites de ces congruences demeurent invariables, il n'en est pas de même de leurs points focaux.

Appliquons la remarque générale précédente au cas où l'on choisit pour $\theta$ une solution particulière déjà indiquée plus haut. Si $x, y, z$ désignent les coordonnées du centre instantané *par rapport à des axes invariablement liés à* $(\Theta)$, nous avons vu que l'équation (34) admet la solution

$$\theta_1 = x_1^2+y_1^2+z_1^2-x^2-y^2-z^2.$$

Comme la sphère représentée par l'équation (37) a, dans ce cas,

pour rayon

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2-\theta_1} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

son équation par rapport aux axes mobiles sera évidemment

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=x^2+y^2+z^2$$

ou encore

$$X^2+Y^2+Z^2-2Xx-2Yy-2Zz=0,$$

et elle passera par un point fixe du système mobile, à savoir l'origine des coordonnées; de sorte que sa corde de contact sera la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$; elle sera l'axe du cercle appartenant au système cyclique déterminé par la sphère de rayon nul ayant son centre en ce point. Par suite, dans ce cas particulier comme dans celui où $\theta$ est une solution quelconque de l'équation (34), les développables de la congruence engendrée par cet axe correspondront aux courbes du système conjugué commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$.

939. D'après cela, si M désigne un point du système mobile invariablement lié à $(\Theta)$, le système cyclique dérivé de ce point se définira comme il suit.

Les différents cercles (C) du système seront les intersections du *point-sphère* M avec les positions successives du plan de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$.

Les différentes surfaces $(\Sigma)$ normales aux positions successives du cercle (C) seront engendrées par le point d'intersection, avec ce plan de contact, d'une génératrice rectiligne déterminée, mais quelconque, du point-sphère M. Chacune de ces surfaces constituera l'unique nappe focale située à distance finie de la congruence engendrée par cette génératrice isotrope.

Enfin les deux familles de surfaces (E), (E') qui complètent avec la famille $(\Sigma)$ le système triple orthogonal se définiront de la manière suivante : Quand le point de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$ décrira une des courbes du système conjugué commun, l'axe du cercle (C) engendrera une surface développable $(\Delta)$; les différentes positions de ce cercle engendreront une des surfaces (E) ou (E'), qui sera une enveloppe de sphère et sera touchée, en tous les points du cercle (C), par la sphère qui contient ce cercle et a son centre au point de contact de l'axe du cercle et de l'arête de re-

broussement de la développable ($\Delta$), c'est-à-dire à l'un des points focaux de cet axe.

A chaque cercle (C) correspondent évidemment deux sphères qui le contiennent et qui ont pour centres les deux points focaux F et F′ (*fig.* 86) de l'axe de ce cercle. Comme le rayon du cercle (C) est égal à $i$.MP, P désignant le point où l'axe du cercle coupe le plan de contact, les angles $\varphi$ et $\varphi'$ sous lesquels les deux sphères coupent le plan de contact sont évidemment déterminés par les formules

$$\operatorname{tang}\varphi = i\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{FP}}, \qquad \operatorname{tang}\varphi' = i\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{F'P}},$$

et, comme elles sont orthogonales, on aura nécessairement

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \overline{\mathrm{FP}}.\overline{\mathrm{F'P}}.$$

En d'autres termes, les foyers F, F′ divisent harmoniquement le segment formé par le point M et son symétrique relativement au plan de contact.

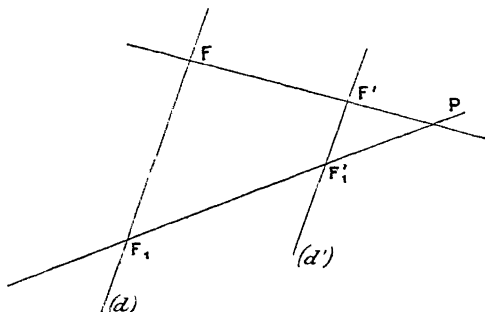
Le lecteur pourra vérifier cette relation en étudiant directement la congruence rectiligne formée par l'axe du cercle (C); il reconnaîtra également ce fait important que l'angle $\varphi$ sous lequel le plan de contact est coupé par une des sphères demeure le même pour chaque position de ($\Theta$) et de ($\Theta_1$) lorsqu'on substitue au point M tout autre point $M_1$ invariablement lié, lui aussi, à ($\Theta$). Nous préférons établir ce dernier résultat par la méthode suivante.

940. Soient M, $M_1$ deux points du système mobile invariablement liés à ($\Theta$). Les perpendiculaires abaissées de ces points sur le plan de contact de ($\Theta$) et de ($\Theta_1$) engendrent deux congruences distinctes dont les développables se correspondent, puisqu'elles correspondent au même système conjugué de ($\Theta$). Envisageons d'une manière générale les congruences engendrées par deux droites parallèles et pour lesquelles les développables se correspondent. Voici les propriétés générales que nous avons déjà signalées à leur égard (n° 920) et que nous compléterons en les démontrant de nouveau par une voie directe [1].

[1] Ribaucour y avait été conduit de son côté et les a énoncées dans une Note *Sur les systèmes cycliques* insérée le 17 août 1891 au Tome CXIII des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (p. 304 et 324).

941. Soient $(d)$ et $(d')$ (*fig.* 85) les deux droites parallèles; $F$, $F_1$ les points focaux de la première; $F'$, $F'_1$ les points focaux correspondants de la seconde. Quand les droites varient, ces points focaux décrivent les nappes focales des deux congruences, nappes que nous désignerons respectivement par les lettres $(F)$, $(F')$,

Fig. 85.




$(F_1)$, $(F'_1)$. Cela posé, quand la droite $(d)$ engendre une développable, elle demeure tangente, par exemple, à la courbe décrite par le point $F$ et alors la droite $(d')$ demeure tangente à la courbe décrite par le point $F'$. Les deux courbes décrites par $F$ et par $F'$ ayant leurs tangentes parallèles ont, par suite, leurs plans osculateurs parallèles; et comme ces plans osculateurs (n° 318) sont les plans tangents aux nappes $(F_1)$, $(F'_1)$, il en résulte que ces deux nappes se correspondent par parallélisme des plans tangents. En considérant l'autre série de développables on démontrera de même que les plans tangents aux points correspondants de $(F)$ et de $(F')$ sont parallèles. D'après les propositions énoncées au n° 319, les développables engendrées par $(d)$ et par $(d')$ correspondent à un système conjugué tracé sur les quatre nappes, et, d'après d'autres propositions données au n° 426, on sait que, lorsque deux surfaces se correspondent par plans tangents parallèles, les courbes du système conjugué commun ont, sur les deux surfaces, leurs tangentes parallèles. De plus, lorsqu'on se déplace suivant l'une des courbes du système conjugué commun, la droite qui joint les points correspondants des deux surfaces engendre aussi une développable. Nous voyons donc qu'ici les droites $FF'$, $F_1F'_1$ engendreront des développables en même temps que les droites $(d)$ et $(d')$.

Considérons d'abord les développables pour lesquelles les arêtes de rebroussement sont décrites par les points F et F'; la caractéristique du plan des deux droites sera alors la ligne FF'. Dans l'autre série de développables ce serait la droite $F_1F'_1$. Donc *la surface enveloppée par le plan des deux droites touche ce plan au point* P *de rencontre de* FF' *et de* $F_1F'_1$. D'autre part, comme les deux tangentes PFF', $PF_1F'_1$ décrivent en même temps des développables, il est nécessaire qu'elles soient conjuguées et que, dans la première série, lorsque F, F' décrivent des courbes tangentes aux deux droites, le point P décrive une courbe tangente à $PF_1F'_1$. Ainsi :

*Si deux droites parallèles engendrent des congruences dont les développables se correspondent, le plan de ces droites touche une certaine surface* ($\Sigma$) *et les points focaux des deux droites sont sur deux tangentes conjuguées de* ($\Sigma$); *de telle sorte que les congruences formées de ces droites correspondent aux deux familles de courbes de* ($\Sigma$) *admettant les deux tangentes conjuguées.*

Lorsque le point P décrira une de ces courbes conjuguées, les deux droites ($d$), ($d'$) seront tangentes aux deux courbes qui sont décrites par les points où elles sont coupées par la tangente conjuguée de la direction suivie par le point P.

**942.** On peut ajouter encore la propriété suivante :

Définissons un rayon R par l'égalité

$$\frac{PF}{PF'} = \frac{R}{R+h},$$

où $h$ désigne une constante quelconque. Décrivons, du point P comme centre, des sphères (S), (S') de rayons R et R + $h$. *La polaire de* ($d$) *par rapport à* (S) *sera la corde de contact de cette sphère avec son enveloppe; et de même la polaire de* ($d'$) *par rapport à* (S').

En effet, menons par la droite ($d$) un plan (P) tangent à (S). En vertu de la relation précédente, le plan parallèle (P') mené par ($d'$) sera tangent à (S') et il sera à la distance $h$ du premier. Comme les deux plans ainsi construits ont leur distance invariable, ils enve-

lopperont évidemment deux surfaces parallèles; et, pour tout déplacement, leurs caractéristiques, nécessairement parallèles, seront perpendiculaires à la normale commune des deux enveloppes. En d'autres termes, toute droite rencontrant ces deux caractéristiques rencontrera aussi la normale commune aux deux surfaces parallèles.

Or quand les droites $(d)$ et $(d')$ décrivent des développables, celles par exemple pour lesquelles les arêtes de rebroussement sont décrites par les points F et F′, la caractéristique du plan (P) passera évidemment en F et celle du plan (P′) en F′. Donc la droite FF′ rencontrera la normale commune aux deux enveloppes. Comme on peut répéter le même raisonnement pour la droite $F_1F'_1$ on voit que la normale commune ira passer en P au point de rencontre de FF′ et de $F_1F'_1$. Par suite, les points de contact des plans (P) et (P′) avec leurs enveloppes sont sur la perpendiculaire commune abaissée de P sur ces deux plans; ce sont précisément les points de contact des sphères (S), (S′) avec ces plans; de sorte que les enveloppes de ces deux sphères sont identiques aux enveloppes des plans. Cela établit la proposition annoncée.

Nous avions vu au n° 474 que si, des différents points d'une surface comme centre, on décrit une sphère de rayon variable R, les points focaux de la polaire de la corde de contact de la sphère avec son enveloppe sont sur deux tangentes conjuguées de la surface; et il résulte de l'analyse développée dans ce numéro que deux sphères dont les rayons diffèrent d'une constante donnent dans le plan tangent deux polaires parallèles appartenant à des congruences dont les développables se correspondent. Les considérations géométriques que nous venons d'exposer prouvent que *l'on obtiendra par cette construction tous les systèmes de deux droites parallèles engendrant des congruences dont les développables se correspondent.*

**943.** Pour compléter l'étude de ce sujet, nous établirons la réciproque de la proposition démontrée au n° 474, en prouvant que si une droite $(d)$ (*fig.* 85), située dans le plan tangent d'une surface $(\Sigma)$ et définie pour chaque position de ce plan, engendre, lorsqu'il varie, une congruence telle que ses points focaux F, $F_1$ soient toujours situés sur deux tangentes conjuguées PF, $PF_1$ de

$(\Sigma)$, elle peut toujours être considérée comme la polaire de la corde de contact (pour abréger nous dirons *polaire*) d'une sphère variable ayant son centre sur la surface $(\Sigma)$. Le rayon de cette sphère sera déterminé à un facteur constant près.

Supposons, en effet, que la droite $FF_1$ se déplace de manière à engendrer la développable pour laquelle le point focal est F; la caractéristique du plan tangent sera évidemment PF et, par suite, le point P se déplacera suivant $PF_1$; les droites PF, $PF_1$ engendreront des éléments de surfaces développables. En répétant ce raisonnement pour le second point $F_1$ on établira que les développables de la congruence engendrée par $FF_1$ correspondent sur $(\Sigma)$ aux courbes du réseau conjugué admettant en P les tangentes PF, $PF_1$; et, par conséquent, que la surface décrite par le point F sera coupée suivant deux familles de courbes conjuguées par les développables de la congruence engendrée par PF. Si donc $x$, $y$, $z$ désignent les coordonnées cartésiennes du point P, si $\rho$, $\rho_1$ sont les paramètres des deux familles conjuguées tracées sur $(\Sigma)$ ($\rho$ restant constant sur les courbes qui admettent la tangente $PF_1$), les coordonnées cartésiennes du point F seront (n° 418)

$$x - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho}}\frac{\partial x}{\partial\rho}, \qquad y - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho}}\frac{\partial y}{\partial\rho}, \qquad z - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho}}\frac{\partial z}{\partial\rho},$$

$\theta$ étant une certaine solution de l'équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont $x$, $y$, $z$ considérées comme fonctions de $\rho$, $\rho_1$.

En faisant varier $\rho_1$ et différentiant les expressions précédentes des coordonnées de F, on aura les paramètres directeurs de $FF_1$, qu'on pourra mettre sous la forme

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial\rho}}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho}} - \frac{\frac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}}, \qquad \frac{\frac{\partial y}{\partial\rho}}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho}} - \frac{\frac{\partial y}{\partial\rho_1}}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}}, \qquad \frac{\frac{\partial z}{\partial\rho}}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho}} - \frac{\frac{\partial z}{\partial\rho_1}}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}};$$

et la symétrie parfaite de ces expressions conduit à adopter pour les coordonnées du point $F_1$ les valeurs suivantes

$$x - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}, \qquad y - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}}\frac{\partial y}{\partial\rho_1}, \qquad z - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}}\frac{\partial z}{\partial\rho_1},$$

qui sont les seules satisfaisant à la question.

Or il suffit de comparer ces expressions des coordonnées des points focaux F, $F_1$ à celles que nous avons données au n° 474 pour reconnaître que la droite $(d)$ sera la *polaire* de toutes les sphères dont le rayon R satisfait à la condition

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\theta}{\theta}$$

et de celles-là seulement. On tire de là

$$R = a\theta,$$

$a$ désignant une constante quelconque, et notre proposition se trouve ainsi entièrement établie.

944. Cette proposition nous montre que les différentes droites $(d)$ situées dans les plans tangents d'une surface $(\Sigma)$ peuvent engendrer deux espèces bien distinctes de congruences : les unes, pour lesquelles les points focaux de la droite ne sont pas sur deux tangentes conjuguées de $(\Sigma)$; les autres, au contraire, pour lesquelles les tangentes contenant ces points focaux sont conjuguées. *Pour ces dernières seulement,* la droite de la congruence peut être définie comme la polaire d'une sphère variable ayant son centre sur la surface donnée. Ces congruences sont aussi les seules pour lesquelles il existe dans le plan tangent de $(\Sigma)$ des droites $(d')$ parallèles à $(d)$ et qui engendrent des congruences dont les développables correspondent à leurs développables. Si l'on désigne par $d$ et $d'$ les distances des droites $(d)$ et $(d')$ au point P, on doit avoir, d'après une propriété établie plus haut,

$$\frac{d'}{d} = \frac{PF'}{PF} = \frac{R+h}{R} = \frac{a\theta + h}{a\theta} = 1 + \frac{\frac{h}{a}}{\theta},$$

On voit donc que la droite $(d')$ dépendra de la seule constante $\frac{h}{a}$; par suite, dans chaque plan tangent de $(\Sigma)$, il y aura un seul faisceau de droites $(d')$ parallèles à $(d)$; et les distances mutuelles de ces droites conserveront un rapport invariable lorsque le plan tangent variera.

Si des droites $(d)$ sont les polaires d'une famille de sphères ayant leur centre sur $(\Sigma)$, cette propriété se conserve, d'après le théorème établi au n° 758 et déjà rappelé au n° 938, lorsque la sur-

face se déforme en entraînant les sphères, les plans tangents et les droites $(d)$. Par conséquent, la distinction que nous avons établie entre les congruences engendrées par les droites situées dans les plans tangents de $(\Sigma)$ subsiste après une déformation quelconque de cette surface : si les droites $(d)$ étaient les polaires d'une famille de sphères, elle conserveront cette propriété après la déformation; elles ne pourront l'acquérir si elles ne la possédaient pas. Nous pouvons conclure de là que :

*Si deux droites parallèles situées dans les plans tangents de* $(\Sigma)$ *engendrent des congruences pour lesquelles les développables se correspondent, elles conserveront cette propriété lorsque* $(\Sigma)$ *se déformera en les entraînant.*

Nous ferons usage plus loin de cette proposition.

945. Revenons aux systèmes cycliques et aux deux congruences engendrées par les perpendiculaires abaissées de deux points $M$, $M_1$ sur le plan tangent commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$. Le plan de ces deux perpendiculaires est le plan projetant de la droite $MM_1$. Donc (n° 936) il touchera son enveloppe au point $m$ où cette droite prolongée va rencontrer le plan de contact (*fig.* 86).

Donc, d'après la proposition du n° 941, les points focaux $F$, $F'$ et $F_1$, $F'_1$ (*fig.* 86) des droites $MP$ et $M_1P_1$ sont situés deux à deux sur des droites concourantes en $m$; et ces deux droites $mF$, $mF'$ sont même des tangentes conjuguées de la surface lieu du point $m$. Soit $(C)$ le cercle relatif au point $M$, $(C_1)$ le cercle relatif au point $M_1$. Les sphères qui contiennent ces deux cercles et qui ont pour centre, la première le point $F$, la seconde le point $F_1$, coupent le plan de contact sous des angles $\varphi$, $\varphi_1$ déterminés par les formules

$$\operatorname{tang}\varphi = i\frac{MP}{FP}, \qquad \operatorname{tang}\varphi_1 = i\frac{M_1P_1}{F_1P_1}.$$

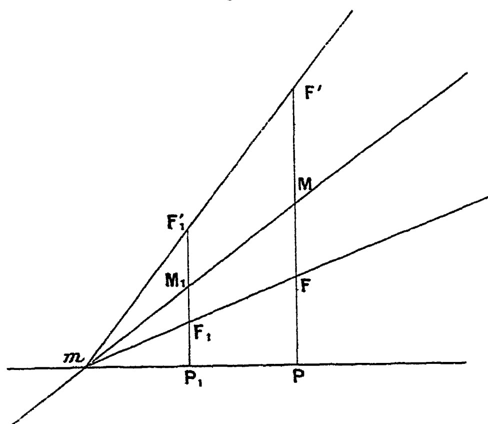
Les deux points $F$, $F_1$ étant en ligne droite avec $m$, on aura évidemment

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\varphi_1.$$

Donc, *pour tous les systèmes cycliques correspondants à la triple infinité de points que l'on peut rattacher à* $(\Theta)$, *les enve-*

*loppes de sphères engendrées par les différents, cercles lorsque le centre instantané décrit une des courbes du système conjugué commun, coupent toutes sous le même angle le plan de contact de* $(\Theta)$ *et de* $(\Theta_1)$.

Fig. 86.




Ajoutons la remarque suivante : les rayons des deux cercles (C), $(C_1)$ peuvent être pris égaux en grandeur et en signe aux ordonnées PM, $P_1M_1$, multipliées l'une et l'autre par $i$. Avec ce signe donné aux rayons, $m$ est le centre de similitude des deux cercles. L'un quelconque des deux plans isotropes que l'on peut mener par la droite $MM_1$ touchera les deux points sphères M et $M_1$ suivant deux droites isotropes invariablement liées au système mobile et coupera le plan de contact suivant une des tangentes communes menées de $m$ aux deux cercles. Donc les deux points de contact de chacune de ces tangentes décriront deux surfaces normales aux deux cercles, et ces surfaces seront parallèles puisque la distance des deux points de contact sur les deux cercles est constante et égale, comme on le démontre aisément, à la distance des deux points M, $M_1$.

**946.** On peut compléter cette étude du mouvement de $(\Theta)$ sur $(\Theta_1)$, déterminer par exemple les points où une surface invariablement liée à $(\Theta)$ touche son enveloppe, points qui sont les pieds des normales abaissées du centre instantané sur la surface.

On déterminera de même les points focaux de la congruence engendrée par une courbe invariablement liée à $(\Theta)$. On peut aussi étudier la congruence engendrée par les courbes (K) qui sont les sections d'une surface (S) invariablement liée au système mobile par le plan de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$. On reconnaîtra aisément par la Géométrie comment on peut assembler ces courbes (K) en familles admettant une enveloppe. Nous nous bornerons à considérer avec Ribaucour le cas où la surface (S) se réduit à un plan (P) qui coupe le plan de contact suivant une droite $(d)$. Nous allons montrer que *les développables de la congruence engendrée par cette droite correspondent aux courbes du système conjugué commun et que leurs points focaux sont sur les tangentes menées à ces courbes au centre instantané.*

Le lecteur fera aisément la démonstration géométrique. Nous nous contenterons d'employer l'analyse.

Si, du point de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$ comme centre, on décrit une sphère tangente au plan (P), la droite $(d)$ sera évidemment la polaire de la corde de contact de cette sphère avec son enveloppe. Pour retrouver le théorème que nous voulons établir, il suffit de se rappeler la proposition du n° 474 et de remarquer qu'ici le rayon de la sphère est une fonction linéaire à coefficients constants des coordonnées $x$, $y$, $z$ définies au n° 938. Par suite, l'équation ponctuelle relative au système conjugué dont il est question au n° 474 est bien celle à laquelle satisfont $x$, $y$, $z$, $x_1$, $y_1$, $z_1$ et qui se rapporte au système conjugué commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$.

Cette démonstration suppose essentiellement que le plan (P) n'est pas isotrope. Mais la proposition subsiste même dans ce cas exceptionnel. Il suffit de remarquer que, dans le cas général, on peut prendre pour le rayon de la sphère non plus la distance au plan (P), mais une quantité proportionnelle à cette distance (n° 943), c'est-à-dire une fonction linéaire à coefficients constants des coordonnées $x$, $y$, $z$ qui, égalée à zéro, donne l'équation du plan (P). Ainsi énoncée, la proposition subsiste sans modification lorsque le plan (P) devient isotrope.

947. Si nous considérons deux plans parallèles (P), (P') invariablement liés au système mobile, nous obtiendrons deux droites

$(d)$, $(d')$ dont les plans focaux seront nécessairement parallèles et dont les points focaux seront sur les deux tangentes conjuguées de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$ relatives au centre instantané.

En particulier, si les plans (P), (P′) sont isotropes, les deux droites $(d)$, $(d')$ sont normales l'une et l'autre à une surface (n° 762) *et puisque leurs plans focaux sont parallèles, deux des surfaces normales à ces droites admettent la même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure. Ces deux surfaces seront décrites par les points d'intersection du plan de contact et de deux droites isotropes parallèles invariablement liées à* $(\Theta)$, *situées respectivement dans les plans* (P) *et* (P′).

Ainsi la connaissance d'un couple de surfaces applicables l'une sur l'autre entraîne celle d'une infinité de couples de surfaces admettant la même représentation sphérique. Dans les Chapitres suivants, nous établirons la réciproque et nous mettrons en évidence les relations qui existent entre le problème de la représentation sphérique et celui de la déformation infiniment petite, en développant les résultats qui ont été indiqués dès 1882 et 1883 dans une série de Communications faites à l'Académie des Sciences.

# CHAPITRE VII.

## LES SYSTÈMES CYCLIQUES ET LES SURFACES APPLICABLES.

Rappel des formules établies au Livre IV, Chap. XV, et relatives au système orthogonal formé par les lignes de courbure. — Relation entre les deux équations, ponctuelle et tangentielle, relatives au système conjugué formé par ces lignes. — Détermination des surfaces admettant la même représentation sphérique qu'une surface donnée ($\Sigma$). — Rappel de la première solution. — Théorème de Ribaucour qui montre que les surfaces cherchées admettent pour normales les cordes de contact d'une famille de sphères ayant leur centre sur la surface ($\Sigma$). — Détermination des systèmes cycliques engendrés par des cercles normaux à ($\Sigma$). — Propriétés géométriques relatives aux systèmes cycliques. — Propositions qui rattachent la théorie de la représentation sphérique à celle de la déformation des surfaces. — Détermination des systèmes cycliques déduite d'un couple de surfaces applicables. — Ce que deviennent les réseaux I, II, III du Chapitre III pour un couple de surfaces applicables ($\Theta$), ($\Theta_1$). — Définition nouvelle de la méthode de transformation introduite au n° 903 sous le nom d'*inversion composée*. — Les formules qui permettent de définir le roulement de ($\Theta$) sur ($\Theta_1$). — Détermination de tous les systèmes triples orthogonaux pour lesquels une des familles est composée de surfaces à lignes de courbure planes dans un système.

---

948. Rappelons rapidement les résultats établis au Livre IV, Chap. XV [II, p. 338 et suiv.]. Nous avons désigné par $x, y, z$ les coordonnées rectangulaires d'un point variable d'une surface quelconque ($\Sigma$), par $c$, $c'$, $c''$ les cosinus directeurs de la normale en ce point et nous nous sommes proposé de trouver tous les systèmes cycliques formés de cercles normaux à ($\Sigma$). Pour cela nous avons pris comme point de départ les équations d'Olinde Rodrigues

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} + R\,\dfrac{\partial c}{\partial \rho} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} + R\,\dfrac{\partial c'}{\partial \rho} = 0, & \dfrac{\partial z}{\partial \rho} + R\,\dfrac{\partial c''}{\partial \rho} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \rho_1} + R_1\dfrac{\partial c}{\partial \rho_1} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial \rho_1} + R_1\dfrac{\partial c'}{\partial \rho_1} = 0, & \dfrac{\partial z}{\partial \rho_1} + R_1\dfrac{\partial c''}{\partial \rho_1} = 0, \end{cases}$$

où $\rho$ et $\rho_1$ désignent les paramètres des lignes de courbure, R et $R_1$

les rayons de courbure principaux de $(\Sigma)$. Considérons d'une manière générale le système

$$(2) \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\rho} + R\frac{\partial\mu}{\partial\rho} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1} + R_1\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1} = 0.$$

Il résulte des formules précédentes qu'il admet les solutions particulières

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda = x, & \lambda = y, & \lambda = z, \\ \mu = c, & \mu = c', & \mu = c''; \end{cases}$$

mais nous avons aussi remarqué (n° 481) qu'il admet encore la solution particulière définie par les équations

$$(4) \qquad \lambda = \frac{x^2+y^2+z^2}{2}, \qquad \mu = cx + c'y + c''z.$$

Si l'on élimine $\lambda$ entre les deux équations (2) on sera conduit à l'équation du second ordre

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(R\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(R_1\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}\right),$$

qui, devant admettre les solutions particulières

$$c, \quad c', \quad c'', \quad cx + c'y + c''z,$$

sera l'équation *tangentielle* relative au système conjugué formé par les lignes de courbure de $(\Sigma)$. De même si, entre les deux équations (2), on élimine $\mu$, on trouvera que $\lambda$ satisfait à l'équation

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}\right),$$

qui n'est autre que l'équation *ponctuelle* relative au même système conjugué puisqu'elle admet les solutions particulières

$$x, \quad y, \quad z, \quad x^2+y^2+z^2.$$

La liaison que le système (2) établit entre ces deux équations aux dérivées partielles (5) et (6) met en évidence le fait suivant : *l'intégration de l'une quelconque des deux équations entraînera celle de l'autre, qui s'obtiendra par une simple quadrature à deux variables indépendantes*. Cela résulte des

formules

$$(7)\quad \begin{cases} \lambda = -\int\left(R\frac{\partial\mu}{\partial\rho}d\rho + R_1\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}d\rho_1\right), \\ \mu = -\int\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}d\rho + \frac{1}{R_1}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}d\rho_1\right), \end{cases}$$

tout à fait équivalentes à ce système (2).

**949.** D'après cela, si l'on veut déterminer toutes les surfaces ayant même représentation sphérique que $(\Sigma)$, il suffira (n° **162**) de choisir une solution quelconque $\mu'$ de l'équation (5) et de prendre l'enveloppe du plan défini par l'équation

$$cX + c'Y + c''Z - \mu' = 0.$$

Mais, pour établir les relations géométriques qui vont suivre, nous introduirons, au lieu de $\mu'$, la fonction

$$\mu = \mu' - (cx + c'y + c''z),$$

qui est également une solution de l'équation (5). Le plan qui enveloppe la surface cherchée aura donc pour équation

$$(8)\quad c(X-x) + c'(Y-y) + c''(Z-z) = \mu,$$

de sorte que toute surface $(\Sigma')$ ayant même représentation sphérique que $(\Sigma)$ sera définie par les trois équations

$$(9)\quad \begin{cases} c(x'-x) + c'(y'-y) + c''(z'-z) = \mu, \\ \frac{\partial c}{\partial\rho}(x'-x) + \frac{\partial c'}{\partial\rho}(y'-y) + \frac{\partial c''}{\partial\rho}(z'-z) = \frac{\partial\mu}{\partial\rho}, \\ \frac{\partial c}{\partial\rho_1}(x'-x) + \frac{\partial c'}{\partial\rho_1}(y'-y) + \frac{\partial c''}{\partial\rho_1}(z'-z) = \frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}, \end{cases}$$

où $x'$, $y'$, $z'$ désignent les coordonnées du point de $(\Sigma')$ pour lequel le plan tangent est parallèle au plan tangent de $(\Sigma)$. Prises séparément, les trois équations précédentes représentent, l'une le plan tangent, les deux autres les plans principaux de $(\Sigma')$.

**950.** Les formules que nous venons de rappeler permettent de démontrer presque immédiatement un théorème de Ribaucour. Associons à la solution $\mu$ la fonction $\lambda$ vérifiant les deux équations (2) et définie par la première quadrature (7). En multipliant

par R et $R_1$ respectivement les deux dernières équations (9), on pourra leur donner la forme

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \rho}(x'-x)+\dfrac{\partial y}{\partial \rho}(y'-y)+\dfrac{\partial z}{\partial \rho}(z'-z)=\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \rho_1}(x'-x)+\dfrac{\partial y}{\partial \rho_1}(y'-y)+\dfrac{\partial z}{\partial \rho_1}(z'-z)=\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_1}. \end{cases}$$

Si l'on y regarde pour un instant $x'$, $y'$, $z'$ comme des coordonnées courantes, ces deux équations représentent évidemment la normale à $(\Sigma')$. D'autre part, considérons la sphère (S) définie par l'équation

$$(11)\qquad (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=-2\lambda.$$

Les mêmes équations (10) représentent la corde qui joint les deux points de contact de cette sphère avec son enveloppe. Comme la sphère (S) a son centre au point $(x, y, z)$ qui appartient à $(\Sigma)$, on peut donc énoncer la proposition suivante :

*Étant données deux surfaces* $(\Sigma)$, $(\Sigma')$ *ayant même représentation sphérique, chacune peut être considérée comme normale aux cordes de contact d'une famille de sphères ayant leur centre sur l'autre surface* (1).

Les deux familles de sphères dont il est question dans l'énoncé précédent ne sont même pas entièrement déterminées quand on connaît seulement les deux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma')$. Considérons, par exemple, la sphère (S) définie par l'équation (11); son rayon $\sqrt{-2\lambda}$ dépend de $\lambda$ qui, lorsque $(\Sigma')$ est connue, c'est-à-dire lorsque $\mu$ est donnée, est défini par la première des quadratures (7). On peut donc toujours ajouter une constante à $\lambda$, c'est-à-dire augmenter d'une quantité déterminée quelconque les carrés des rayons de toutes les sphères qui composent les familles dont il est question dans l'énoncé précédent.

Le théorème de Ribaucour conduit à une nouvelle solution du problème de la représentation sphérique. Comme $\lambda$ est une solution de l'équation (6), c'est-à-dire de l'équation ponctuelle rela-

(1) RIBAUCOUR, *Sur une propriété des surfaces enveloppes de sphères* (*Comptes rendus*, t. LXVII, p. 1334; 1868).

tive au système conjugué formé par les lignes de courbure de $(\Sigma)$, on voit que *toute solution* $\lambda$ *de cette équation donnera les normales à l'une des surfaces cherchées* $(\Sigma')$ *par les équations* (10), *c'est-à-dire comme cordes de contact de la sphère définie par l'équation* (11). Mais remarquons que, pour avoir effectivement la surface cherchée, et non plus seulement ses normales, il restera à déterminer $\mu$ par la seconde des quadratures (7). La constante introduite par cette quadrature fournira toutes les surfaces admettant les mêmes normales.

**951.** Nous avons vu au n° **482** qu'à chaque système cyclique formé de cercles normaux à $(\Sigma)$ on peut associer un système $\lambda$, $\mu$ de solutions du système (2) et *vice versa*. Étudions les relations géométriques entre ce système cyclique et le couple des surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma')$, admettant la même représentation sphérique et correspondant à la solution $\mu$.

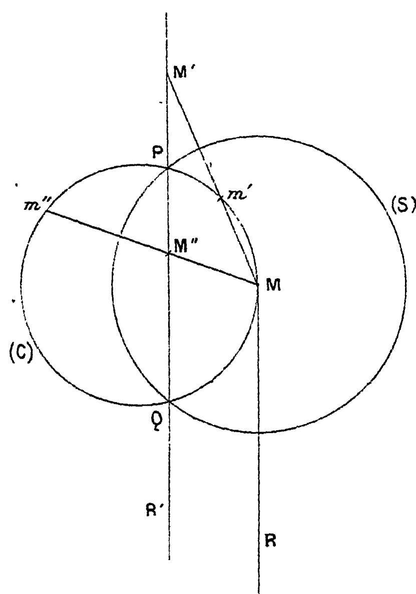
Soient (*fig.* 87) M et M′ deux points correspondants quelconques des surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma')$; MR, M′R′ les deux normales en ces points aux deux surfaces, normales nécessairement parallèles. Reprenons les équations (59) et (60) données aux n$^{os}$ **481**, **482** [II, p. 341]

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &(\rho_2+\mu)[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2] \\ &\qquad +2\lambda[\ c(X-x)+\ c'(Y-y)+\ c''(Z-z)]=0, \\ &\frac{\partial\mu}{\partial\rho}[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2] \\ &\qquad +2\lambda\left[\frac{\partial c}{\partial\rho}(X-x)+\frac{\partial c'}{\partial\rho}(Y-y)+\frac{\partial c''}{\partial\rho}(Z-z)\right]=0, \\ &\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2] \\ &\qquad +2\lambda\left[\frac{\partial c}{\partial\rho_1}(X-x)+\frac{\partial c'}{\partial\rho_1}(Y-y)+\frac{\partial c''}{\partial\rho_1}(Z-z)\right]=0, \end{aligned}\right.$$

équations qui font connaître les coordonnées X, Y, Z d'un point variable en fonction des trois variables $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$. Nous avons vu que les valeurs de $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$ tirées de ces trois équations sont les paramètres des trois familles qui composent le système orthogonal. Si nous considérons seulement les deux dernières équations (12), elles représentent, pour chaque système de valeurs de $\rho$ et de $\rho_1$,

un cercle (C) normal en M à $(\Sigma)$, cercle qui engendre le système cyclique considéré. La sphère représentée par la première des équations (12) admet, lorsque $\rho$ et $\rho_1$ varient, une enveloppe à deux nappes qui se compose de la surface $(\Sigma)$ et d'une des surfaces normales à toutes les positions du cercle (C). L'ensemble

Fig. 87.




de ces enveloppes forme la famille des surfaces de paramètre $\rho_2$. Prises séparément, la deuxième et la troisième équation représentent deux sphères orthogonales se coupant suivant le cercle (C) et tangentes *en tous les points de ce cercle* aux enveloppes de sphères (E), $(E_1)$ qui constituent la deuxième et la troisième famille de notre système orthogonal. Par exemple, pour obtenir toutes les enveloppes (E) de paramètre $\rho$, on peut éliminer $\rho_1$ entre les deux dernières équations (12) ou, ce qui est la même chose quant au résultat, prendre l'enveloppe de la sphère définie par la seconde équation *en faisant varier* $\rho_1$ *seulement*. Tous ces résultats sont acquis et ont été démontrés au Livre IV, Chap. XV. Comme d'ailleurs on peut toujours se donner arbi-

trairement la surface $(\Sigma)$, il est clair que les équations précédentes définissent le système cyclique le plus général rapporté à l'une quelconque des trajectoires orthogonales de tous les cercles, pourvu que l'on choisisse pour $\lambda$ et $\mu$ les solutions les plus générales du système (2) relatif à la surface $(\Sigma)$.

**932.** Tous ces points étant rappelés, reprenons les deux dernières équations (9) qui définissent la normale à la surface $(\Sigma')$ et comparons-les aux deux dernières (12) qui représentent le cercle (C). On passe des unes aux autres par la substitution

$$\frac{x'-x}{X-x}=\frac{y'-y}{Y-y}=\frac{z'-z}{Z-z}=\frac{-2\lambda}{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}.$$

Ces formules considérées comme établissant une relation entre les deux points $(X, Y, Z)$ et $(x', y', z')$ définissent évidemment une *inversion* dont le pôle est le point M et dont le module est $\sqrt{-2\lambda}$, c'est-à-dire dont la sphère principale est la sphère (S). Cette même substitution, appliquée à la première des équations (12), la transforme de même dans la suivante

$$(13)\qquad c(x'-x)+c'(y'-y)+c''(z'-z)=\mu+\rho_2;$$

c'est l'équation d'un plan qui enveloppe une surface $(\Sigma'')$ parallèle à $(\Sigma')$ et menée à la distance $\rho_2$ de $(\Sigma')$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

*Étant données deux surfaces* $(\Sigma)$, $(\Sigma')$ *qui ont la même représentation sphérique, soient* M, M′ *deux points correspondants pris respectivement sur ces deux surfaces. La normale en* M′ *peut toujours être considérée comme la corde de contact d'une sphère* (S) *ayant son centre en* M *et dont le rayon* $\sqrt{-2\lambda}$ *dépend de la quadrature qui détermine* $\lambda$. *La figure inverse de cette normale par rapport à la sphère* (S) *est un cercle* (C) *dont les différentes positions engendrent un système cyclique. Ce cercle, évidemment normal en* M *à* $(\Sigma)$, *passe par les points d'intersection* P *et* Q *de la sphère* (S) *et de la normale en* M′. *Les différents points* $m'$, $m''$ *de ce cercle qui sont les inverses de* M′ *ou de tout autre point* M″ *de la normale situé à une*

*distance invariable de* M′ *engendrent les différentes surfac normales à toutes les positions du cercle* (C). *Enfin les deu sphères qui sont les inverses des plans principaux de* (Σ′) *so celles qui touchent les deux enveloppes de sphères* (E), (E *auxquelles appartient le cercle* (C), *enveloppes qui so engendrées par ce cercle lorsqu'il se déplace de telle maniè que le point* M *décrive une des lignes de courbure de* (Σ). *L centres de ces deux sphères sont évidemment au point de re contre des tangentes principales de* (Σ) *en* M *et de l'axe* ( *cercle* (C).

953. Il résulte de cette première proposition qu'à tout cou de surfaces (Σ), (Σ′) admettant la même représentation sphériq on peut faire correspondre une infinité de systèmes cycliqu formés de cercles normaux à (Σ); car on peut toujours ajou une constante arbitraire à la fonction λ.

Cette proposition peut d'ailleurs revêtir une autre forme si l' considère comme connu un système cyclique, engendré, exemple, par le cercle (C), et si l'on envisage trois trajectoi orthogonales quelconques (Σ), ($\Sigma_1$), ($\Sigma_2$) de ce cercle.

Soient (*fig.* 87) M, $m'$, $m''$ les points où ces trois surfa coupent le cercle (C). La première (Σ) pourra toujours jouer rôle de la surface de même nom dans l'énoncé précédent; connaissance des deux points $m'$, $m''$ nous permettra de recons tuer toute la figure et de retrouver, en particulier, les poi M′, M″.

En effet, dans le plan du cercle (C), la droite M′M″ s évidemment déterminée par la condition d'être parallèle à la t gente en M au cercle (C) et d'avoir le segment M′M″ interce entre les droites concourantes M$m'$, M$m''$ égal à une longu constante quelconque $\rho_2$. Cette droite sera normale aux s faces (Σ′), (Σ″) décrites par les points M′, M″, et ces deux surfa parallèles admettront pour leurs lignes de courbure la même présentation sphérique que (Σ). Leur normale commune M sera la corde de contact de la sphère variable de centre M passe par l'intersection de cette normale même et du cercle (

Quand on fera varier la constante $\rho_2$, toutes les surfaces décr par le point M′ seront celles que l'on obtiendrait en multiplian

fonction $\mu$ par une constante quelconque, dans l'équation (8), ce qui est évidemment permis.

954. Ces propositions préliminaires une fois établies, revenons à l'étude que nous avons interrompue à la fin du Chapitre précédent. Étant données deux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma')$ de même représentation sphérique, soient $(d)$, $(d')$ leurs normales, nécessairement parallèles, en deux points correspondants. Le plan (P) de ces deux droites enveloppe une surface que nous désignerons par $(\Theta_1)$. Quand la surface $(\Theta_1)$ se déformera en entraînant les deux droites, elle ne cesseront pas, dans leurs nouvelles positions, d'être normales à des surfaces (n° 760) et, de plus, les développables qu'on peut former avec elles ne cesseront pas de se correspondre (n° 944). Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, due à Ribaucour (¹) :

*Quand deux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma')$ admettent la même représentation sphérique, le plan des normales correspondantes enveloppe une surface $(\Theta_1)$. Si la surface $(\Theta_1)$ se déforme en entraînant les deux normales dans ses différents plans tangents, celles-ci ne cessent pas d'être normales à des surfaces admettant la même représentation sphérique.*

Mais il importe d'examiner surtout un cas particulier de cette déformation. Construisons le cercle (C) défini plus haut, normal en M à $(\Sigma)$ et déformons la surface $(\Theta_1)$ de telle manière que l'une des sphères de rayon nul passant par le cercle (C) se réduise à un point fixe A invariablement lié à la forme nouvelle $(\Theta)$ de $(\Theta_1)$. Si l'on fait rouler la surface $(\Theta)$ sur $(\Theta_1)$, le point M sera toujours sur une droite isotrope passant par A et invariablement liée à $(\Theta)$ (nᵒˢ 936 et 947); la normale en M à la surface $(\Sigma)$ sera l'intersection du plan de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$ par un plan isotrope *déterminé* (I) du système mobile, plan qui sera tangent au point-sphère A suivant la génératrice isotrope AM (n° 936). Enfin, les seules droites parallèles à $(d)$ situées dans le plan de contact, et qui pourront engendrer des

(¹) Ribaucour, Note déjà citée plus haut [p. 127].

congruences dont les développables correspondent à celles de la congruence des normales à $(\Sigma)$, seront les intersections du plan de contact par des plans isotropes déterminés, parallèles au plan (I) de la figure mobile (n$^{os}$ 936 et 944). Comme l'on connaît une de ces droites, qui est la normale à $(\Sigma')$ en $M'$, on voit que cette droite $(d')$ sera elle aussi dans un plan isotrope *déterminé* (I') du système mobile, plan qui sera parallèle au premier (I). Ainsi, nous obtenons le résultat suivant, également remarqué par Ribaucour :

*Étant données deux surfaces qui ont la même représentation sphérique, si la surface* $(\Theta_1)$ *enveloppe du plan qui contient leurs normales en des points correspondants se déforme en entraînant ces droites, elles ne cessent pas d'être normales à des surfaces ayant la même représentation sphérique; et il existe une déformation* $(\Theta)$ *de* $(\Theta_1)$ *dans laquelle les droites sont amenées à décrire deux plans isotropes parallèles.*

955. Il résulte de ces propositions que, si tout couple de surfaces applicables conduit (n° 947) à une infinité de couples de surfaces admettant la même représentation sphérique, inversement tout couple de surfaces admettant la même représentation sphérique fournit une infinité de couples de surfaces applicables. Il ne sera pas inutile d'insister sur la nature et l'étendue des opérations par lesquelles on déduit l'un de l'autre le couple de surfaces applicables et le couple de surfaces admettant la même représentation sphérique.

Si l'on part d'abord du couple de surfaces applicables $(\Theta)$, $(\Theta_1)$, nous avons vu (n° 947) que, pour obtenir deux surfaces admettant la même représentation sphérique, il faut faire rouler $(\Theta)$ sur $(\Theta_1)$ et prendre les points d'intersection avec le plan de contact de deux droites isotropes parallèles, invariablement liées à $(\Theta)$. Ces deux points d'intersection décrivent les surfaces cherchées $(\Sigma)$, $(\Sigma')$. Toutes les opérations par lesquelles on les obtient n'exigent donc aucune intégration et introduisent les cinq constantes arbitraires dont dépend la position des deux droites isotropes parallèles.

956. Supposons, au contraire, qu'on se donne les surfaces $(\Sigma)$,

$(\Sigma')$ admettant la même représentation sphérique, et conservons toutes les notations employées au début de ce Chapitre. Il faudra d'abord construire les cercles (C) normaux à $(\Sigma)$ et, par conséquent, effectuer la quadrature qui détermine $\lambda$; mais, cette quadrature une fois obtenue, il ne restera plus à faire que des différentiations et des éliminations. En effet, lorsqu'on a un système cyclique et les trajectoires orthogonales des cercles qui le composent, la surface $(\Theta_1)$ est l'enveloppe des plans des cercles. Quant au système mobile formé de la surface $(\Theta)$ qui roule sur $(\Theta_1)$ et des points qui lui sont invariablement liés, on le déterminera comme il suit. Nous en connaissons un premier point O qui est l'un des points-sphères passant par le cercle (C). Si $m$ et $m'$ désignent les points où ce cercle est coupé par deux de ses trajectoires orthogonales, les plans isotropes touchant le point-sphère O suivant les droites O$m$, O$m'$ sont des plans *déterminés* du système mobile se coupant suivant une droite invariablement liée à ce système. On pourra ainsi obtenir, en nombre aussi grand qu'on le voudra, des droites passant par le point O du système mobile. Trois de ces droites forment un trièdre invariable auquel on pourra rattacher un trièdre trirectangle; et les distances du point où $(\Theta_1)$ touche le plan du cercle (C) aux trois faces de ce trièdre trirectangle ne seront autres que les coordonnées du point correspondant de la surface cherchée $(\Theta)$, rapportée à des axes invariablement liés à cette surface. Cette surface sera ainsi déterminée sans aucune quadrature nouvelle.

Si l'on substitue aux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma')$ celles que l'on obtiendrait en remplaçant successivement, dans l'équation (8) du plan tangent, $\mu$ par une fonction linéaire quelconque des solutions $c$, $c'$, $c''$, $\mu$, $cx + c'y + c''z$, on verra facilement qu'ici encore on peut introduire cinq constantes sans qu'il soit nécessaire de faire une nouvelle intégration.

957. D'après les remarques précédentes, ce sont les systèmes cycliques qui établissent le lien entre les deux théories, au premier abord si éloignées, de la déformation des surfaces et de la représentation sphérique. On peut obtenir de tels systèmes, soit en partant d'un couple de surfaces applicables $(\Theta)$, $(\Theta_1)$, soit en prenant comme point de départ un couple de surfaces admettant

la même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure. En développant les calculs qui permettent de les faire dériver d'un couple de surfaces applicables, nous allons rencontrer quelques relations qui viendront s'ajouter utilement aux propositions déjà trouvées ou qui permettront l'application des méthodes indiquées dans les Chapitres précédents.

A cet effet, envisageons d'abord deux surfaces (S), ($S_1$), se correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires; et conservons toutes les notations du Chapitre III. Si l'on pose

$$(14)\quad \begin{cases} x = X' + X'_1, \\ y = Y' + Y'_1, \\ z = Z' + Z'_1; \end{cases} \qquad (14)'\quad \begin{cases} x_1 = X'_1 - X', \\ y_1 = Y'_1 - Y', \\ z_1 = Z'_1 - Z'; \end{cases}$$

ce qui donne

$$(15)\quad \begin{cases} X'_1 = \dfrac{x + x_1}{2}, \\ Y'_1 = \dfrac{y + y_1}{2}, \\ Z'_1 = \dfrac{z + z_1}{2}; \end{cases} \qquad (15)'\quad \begin{cases} X' = \dfrac{x - x_1}{2}, \\ Y' = \dfrac{y - y_1}{2}, \\ Z' = \dfrac{z - z_1}{2}; \end{cases}$$

les deux surfaces ($\Theta$), lieu du point ($X'$, $Y'$, $Z'$), et ($\Theta_1$), lieu du point ($X'_1$, $Y'_1$, $Z'_1$), seront applicables l'une sur l'autre. Cela résulte immédiatement de l'identité

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = dX'^2_1 + dY'^2_1 + dZ'^2_1 - dX'^2 - dY'^2 - dZ'^2.$$

La surface ($\Theta_1$) est décrite par le milieu du segment $MM_1$ qui réunit les points homologues M, $M_1$ de (S) et de ($S_1$); la surface ($\Theta$) est le lieu de l'extrémité du segment égal à la moitié de $M_1M$, partant de l'origine des coordonnées. Les deux surfaces s'échangent l'une dans l'autre lorsque l'on change le signe de $x_1$, $y_1$, $z_1$, c'est-à-dire lorsque l'on remplace la surface ($S_1$) par sa symétrique relative à l'origine des coordonnées.

Considérons la sphère (U) passant par l'origine des coordonnées et décrite du point ($X'$, $Y'$, $Z'$) comme centre. Lorsque l'on fera rouler la surface ($\Theta$) sur la surface ($\Theta_1$), cette sphère entraînée avec la surface ($\Theta$) aura son centre au point ($X'_1$, $Y'_1$, $Z'_1$); et nous avons vu (nº 938) que les points où elle touchera son en-

veloppe seront les centres de sphères de rayon nul coupant le plan tangent à $(\Theta)$ suivant un même cercle $(C)$ qui engendrera un système cyclique. L'équation de la nouvelle position $(U_1)$ de la sphère $(U)$ est évidemment

$$(16)\qquad (X-X'_1)^2+(Y-Y'_1)^2+(Z-Z'_1)^2=X'^2+Y'^2+Z'^2;$$

ou, en remplaçant $X'$, $X'_1$, ... par leurs valeurs (15),

$$(17)\quad (X-x)(X-x_1)+(Y-y)(Y-y_1)+(Z-z)(Z-z_1)=0.$$

Cette équation représente évidemment la sphère décrite sur le segment $MM_1$ comme diamètre. Les points où elle touche son enveloppe s'obtiendront en joignant à l'équation précédente sa différentielle totale

$$\begin{aligned}(X-x)\,dx_1+(Y-y)\,dy_1+(Z-z)\,dz_1&\\ +(X-x_1)\,dx+(Y-y_1)\,dy+(Z-z_1)\,dz&=0.\end{aligned}$$

En tenant compte des relations (5) [p. 49] entre les différentielles $dx$, $dx_1$, ..., on peut donner à cette dernière équation la forme suivante

$$\begin{aligned}&[X-x-c(Y-y_1)+b(Z-z_1)]\,dx_1\\ +&[Y-y-a(Z-z_1)+c(X-x_1)]\,dy_1\\ +&[Z-z-b(X-x_1)+a(Y-y_1)]\,dz_1=0,\end{aligned}$$

et comme $dx_1$, $dy_1$, $dz_1$ sont reliés uniquement par l'équation

$$a_1\,dx_1+b_1\,dy_1+c_1\,dz_1=0,$$

on aura nécessairement

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{X-x-c(Y-y_1)+b(Z-z_1)}{a_1}\\ &=\frac{Y-y-a(Z-z_1)+c(X-x_1)}{b_1}\\ &=\frac{Z-z-b(X-x_1)+a(Y-y_1)}{c_1}.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations représentent la corde de contact de la sphère avec son enveloppe. On pourra les remplacer par les deux sui-

vantes

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{X - x_1 - c_1(Y - y) + b_1(Z - z)}{a} \\ &= \frac{Y - y_1 - a_1(Z - z) + c_1(X - x)}{b} \\ &= \frac{Z - z_1 - b_1(X - x) + a_1(Y - y)}{c}, \end{aligned} \right.$$

qui s'en déduisent immédiatement si l'on échange, ce qui est permis, les points M et $M_1$ ou bien les surfaces (S) et $(S_1)$.

958. Avant de poursuivre le calcul et de déterminer les points d'intersection de la droite précédente avec la sphère $(U_1)$, remarquons que cette droite est nécessairement perpendiculaire au plan tangent de la surface $(\Theta_1)$. Cette remarque nous fournit un moyen d'obtenir la direction de ce plan tangent et un calcul facile donne, pour les cosinus directeurs $C_1$, $C'_1$, $C''_1$ de la normale à la surface $(\Theta_1)$ les expressions suivantes

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{KK_1}\, C_1 &= a - a_1 + bc_1 - cb_1, \\ \sqrt{KK_1}\, C'_1 &= b - b_1 + ca_1 - ac_1, \\ \sqrt{KK_1}\, C''_1 &= c - c_1 + ab_1 - ba_1, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} K &= 1 + a^2 + b^2 + c^2, \\ K_1 &= 1 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2. \end{aligned} \right.$$

Comme on passe de la surface $(\Theta_1)$ à la surface $(\Theta)$ en changeant le signe de $x_1, y_1, z_1, a, a_1, \ldots$, un calcul analogue donnera, pour les cosinus directeurs C, C', C'' de la normale à cette surface, les expressions suivantes

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{KK_1}\, C &= a - a_1 - bc_1 + cb_1, \\ \sqrt{KK_1}\, C' &= b - b_1 - ca_1 + ac_1, \\ \sqrt{KK_1}\, C'' &= c - c_1 - ab_1 + ba_1, \end{aligned} \right.$$

où le signe des radicaux a été choisi de telle manière que les

portions positives des deux normales soient du même côté par rapport aux surfaces $(\Theta)$, $(\Theta_1)$ [1].

959. Ces expressions des cosinus directeurs des normales aux deux surfaces $(\Theta)$, $(\Theta_1)$ nous conduisent à la proposition suivante :

En calculant les différentielles $dC_1$, $dX'_1$ et tenant compte de la relation

$$C_1\,dX'_1 + C'_1\,dY'_1 + C''_1\,dZ'_1 = 0,$$

on formera l'identité

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} & 2\sqrt{KK_1}\,\mathbf{S}\,dC_1\,dX'_1 \\ & = \mathbf{S}\,da(dx+dx_1) - \mathbf{S}\,da_1(dx+dx_1) \\ & + \begin{vmatrix} a & da_1 & dx+dx_1 \\ b & db_1 & dy+dy_1 \\ c & dc_1 & dz+dz_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & da & dx+dx_1 \\ b_1 & db & dy+dy_1 \\ c_1 & dc & dz+dz_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remarque que les relations différentielles (5) et (45) du Chapitre III conduisent à des identités telles que les suivantes.

$$\begin{vmatrix} a & da_1 & dx_1 \\ b & db_1 & dy_1 \\ c & dc_1 & dz_1 \end{vmatrix} = \mathbf{S}\,da_1\,dx,$$

$$\begin{vmatrix} a & da_1 & dx \\ b & db_1 & dy \\ c & dc_1 & dz \end{vmatrix} = -(a^2+b^2+c^2)\,\mathbf{S}\,da_1\,dx_1,$$

on donnera à la relation (23) la forme suivante

$$(24)\qquad 2\sqrt{KK_1}\,\mathbf{S}\,dC'_1\,dX_1 = K_1\,\mathbf{S}\,da\,dx - K\,\mathbf{S}\,da_1\,dx_1.$$

---

[1] Les relations différentielles entre $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ ne changent pas si l'on remplace $x_1, y_1, z_1$ par $hx_1, hy_1, hz_1$; $a_1, b_1, c_1$ par $ha_1, hb_1, hc_1$ et $a, b, c$ par $\frac{a}{h}, \frac{b}{h}, \frac{c}{h}$, $h$ désignant une constante quelconque. Si cette constante devient très petite, $x_1, y_1, z_1$ deviennent très petites et les deux surfaces $(\Theta)$, $(\Theta_1)$ viennent se confondre. Il faut donc que les expressions (21) et (22) des cosinus se rapprochent, ce qui entraîne la détermination du signe pour les secondes (22).

Par de simples changements de signes on établira égaleme[n]
formule

$$(25)\qquad 2\sqrt{KK_1}\,S\,dC\,dX' = K_1\,S\,da\,dx + K\,S\,da_1\,dx_1,$$

relative à la surface $(\Theta)$.

960. Or, dans la théorie du roulement de deux surfaces l
sur l'autre, nous avons été amené à considérer différents rés[eaux]
tracés sur les surfaces $(\Theta)$, $(\Theta_1)$ :

1° Le réseau conjugué commun. Comme l'équation ponct[uelle]
relative à ce réseau est la même pour $(\Theta)$ et pour $(\Theta_1)$, il
clair que cette équation admettra également les solutions $x$, $y$
$x_1$, $y_1$, $z_1$ qui sont des fonctions linéaires de $X'$, $X'_1$, .... D
*le réseau conjugué commun à* $(\Theta)$ *et à* $(\Theta_1)$ *sera aussi comm*
*aux deux surfaces* (S) *et* $(S_1)$. Ce sera notre réseau III. *Se*
*ment, sur* $(\Theta)$ *et sur* $(\Theta_1)$, *ses invariants tangentiels ne ser*
*plus nécessairement égaux.*

L'équation relative à ce réseau doit admettre (n° 935) la s[olu]
tion particulière

$$\theta' = X_1'^2 + Y_1'^2 + Z_1'^2 - X'^2 - Y'^2 - Z'^2,$$

qui se réduit ici à

$$(26)\qquad \theta' = xx_1 + yy_1 + zz_1.$$

2° Le réseau formé de courbes pour lesquelles les courb[ures]
normales sont égales et de même signe. Nous avons vu (n° 9
que ces courbes sont telles que, si le centre instantané décrit l'[une]
d'elles, le mouvement se réduit au roulement d'une développa[ble]
sur une développable. Elles sont évidemment définies par l'éq[ua]
tion différentielle

$$S\,dC\,dX' - S\,dC_1\,dX'_1 = 0,$$

qui, en vertu des formules (24) et (25), devient ici

$$S\,da\,dx = 0.$$

Elles correspondent donc aux lignes asymptotiques de (S) qui constituent notre réseau I.

Remarquons que (S) est homothétique à la *surface milieu* de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$, c'est-à-dire au lieu du milieu du segment qui réunit les points correspondants de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$.

3° Enfin, si l'on faisait rouler sur $(\Theta_1)$, non plus $(\Theta)$, mais la surface symétrique, les courbes précédentes seraient évidemment remplacées par celles pour lesquelles les courbures normales sont égales et de signes contraires. L'équation différentielle

$$\mathbf{S}\, dC\, dX' + \mathbf{S}\, dC_1\, dX'_1 = 0$$

de ce troisième réseau, en vertu des identités (24) et (25), est identique à la suivante

$$\mathbf{S}\, da_1\, dx_1 = 0.$$

On voit donc que les courbes dont il se compose correspondent aux lignes asymptotiques de $(S_1)$, c'est-à-dire aux courbes de notre réseau II.

Ainsi se trouvent définis géométriquement sur les surfaces applicables $(\Theta)$ et $(\Theta_1)$ les trois réseaux du Chapitre III.

**961.** Revenons à nos systèmes cycliques. Pour obtenir les points de contact de la sphère $(U_1)$ avec son enveloppe, il faut joindre à son équation (17) les deux équations (18) ou (19) de la corde de contact. Prenons, par exemple, les deux équations (18), constituées par l'égalité de trois rapports. En ajoutant les numérateurs et les dénominateurs après les avoir multipliés respectivement par $X - x_1$, $Y - y_1$, $Z - z_1$, on trouvera un nouveau rapport

$$\frac{(X-x)(X-x_1)+(Y-y)(Y-y_1)+(Z-z)(Z-z_1)}{a_1(X-x_1)+b_1(Y-y_1)+c_1(Z-z_1)},$$

égal aux précédents et dont le numérateur est certainement nul pour le point de contact cherché. Si le dénominateur de ce rapport est différent de zéro, il faudra que, pour le point de contact, les numérateurs des trois rapports (18) soient nuls. On est ainsi

conduit aux trois équations

$$(27)\qquad \begin{cases} X - x - c(Y - y_1) + b(Z - z_1) = 0, \\ Y - y - a(Z - z_1) + c(X - x_1) = 0, \\ Z - z - b(X - x_1) + a(Y - y_1) = 0, \end{cases}$$

qui déterminent l'un des deux points de contact cherchés. Le second sera défini par les équations analogues

$$(28)\qquad \begin{cases} X - x_1 - c_1(Y - y) + b_1(Z - z) = 0, \\ Y - y_1 - a_1(Z - z) + c_1(X - x) = 0, \\ Z - z_1 - b_1(X - x) + a_1(Y - y) = 0, \end{cases}$$

de sorte que l'un et l'autre, comme il était aisé de le prévoir, se déterminent *rationnellement*. Remarquons que *le premier est dans le plan tangent de* (S), comme il résulte de l'équation

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0,$$

conséquence des formules (27); et que *le second est, de même, dans le plan tangent de* $(S_1)$. Nous expliquerons plus loin ce fait si curieux.

**962.** La sphère $(U_1)$, que nous avons été conduit à introduire dans la théorie précédente, donne naissance à quelques propriétés parmi lesquelles nous signalerons la suivante :

Les points où elle coupe la droite d'intersection des plans tangents à (S) et à $(S_1)$ sont dans les plans focaux de la droite $MM_1$ qui réunit les points correspondants de (S) et de $(S_1)$.

Mais nous préférons insister sur le rôle qu'elle joue dans l'inversion composée.

Reprenons les formules données au n° **903** et qui définissent cette transformation. Étant donnés deux points M, $M_1$ dont les homologues soient $M'$, $M'_1$; considérons les deux sphères (V) et (V') décrites respectivement sur $MM_1$ et sur $M'M'_1$ comme diamètres. Ces deux sphères sont les inverses l'une de l'autre relativement à l'inversion simple que l'on obtiendrait en supposant, dans les formules (16) [p. 80], que les deux points distincts $(x, y, z)$ et $(x_1, y_1, z_1)$ soient amenés à coïncider. Admettons ce résultat dont la vérification est aisée : nous voyons qu'on peut en déduire

une réduction de l'inversion composée à l'inversion ordinaire. En effet, pour définir l'inversion composée par laquelle on transforme un système de deux points M, $M_1$, on décrira sur $MM_1$ comme diamètre une sphère (V) et l'on prendra la transformée (V') de cette sphère dans une inversion ordinaire. Cette sphère (V') aura un diamètre *unique* dont les extrémités M', $M'_1$ seront sur les droites $OM_1$, OM qui joignent les points $M_1$, M au pôle de l'inversion; et le segment $M'M'_1$ sera celui qui doit correspondre à $MM_1$, dans l'inversion composée telle qu'elle a été définie au n° 903.

Il résulte de cette nouvelle définition que, *lorsque l'on appliquera l'inversion composée aux deux surfaces* (S), ($S_1$), *on soumettra en réalité les sphères* ($U_1$) *à une inversion simple.* Il en sera donc de même pour les points de contact de ces sphères avec leurs enveloppes, pour les sphères de rayon nul qui ont leurs centres en ces points et, par suite aussi, *pour les cercles qui composent le système cyclique dérivé de* (S) *et de* ($S_1$).

963. Il sera évidemment très utile pour les applications de pouvoir représenter d'une manière simple le roulement de deux surfaces applicables l'une sur l'autre. Or les résultats que nous avons donnés au Chapitre III nous conduisent, pour définir ce déplacement, à des formules de la plus grande simplicité.

Reprenons, par exemple, les équations (46) [p. 66] qui définissent la surface ($\Sigma_1$). Si nous y remplaçons $x$, $x_1$, ... par leurs expressions (14) en X', $X'_1$, ..., leurs seconds membres prennent la forme

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 - c_1 y + b_1 z &= X'_1 - X' - c_1(Y'_1 + Y') + b_1(Z'_1 + Z'),\\ y_1 - a_1 z + c_1 x &= Y'_1 - Y' - a_1(Z'_1 + Z') + c_1(X'_1 + X'),\\ z_1 - b_1 x + a_1 y &= Z'_1 - Z' - b_1(X'_1 + X') + a_1(Y'_1 + Y'). \end{aligned}\right.$$

Or écrivons ces formules comme il suit

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} X' + c_1 Y' - b_1 Z' &= X'_1 - x_1 - c_1(Y'_1 - y) + b_1(Z'_1 - z),\\ -c_1 X' + Y' + a_1 Z' &= c_1(X'_1 - x) + Y'_1 - y_1 - a_1(Z'_1 - z),\\ +b_1 X' - a_1 Y' + Z' &= -b_1(X'_1 - x) + a_1(Y'_1 - y) + Z'_1 - z_1, \end{aligned}\right.$$

et considérons-y pour un instant X', Y', Z' et $X'_1$, $Y'_1$, $Z'_1$ comme des coordonnées variables, tandis que nous attribuerons des valeurs

déterminées aux deux paramètres dont dépendent $x$, $x_1$, $a_1$, ..
Elles définissent évidemment une substitution linéaire : *cette su stitution représente un déplacement.* Si on les résolvait, p exemple, par rapport à X′, Y′, Z′, on retrouverait les formu célèbres qu'Euler a données, le premier, dans les *Nouvea Commentaires de Pétersbourg* et qui sont rationnelles par ra port à trois arbitraires (ici $a_1$, $b_1$, $c_1$). Admettons ce prem point que reconnaîtront sans peine tous les lecteurs au courant la théorie des substitutions orthogonales. Il est clair dès lors qu si l'on fait varier les paramètres qui entrent dans $a_1$, $b_1$, $c_1$, $x_1$, ..., on aura une suite continue de déplacements, ou mie un déplacement à deux variables indépendantes. *Ce déplaceme est précisément le roulement des deux surfaces* ($\Theta$), ($\Theta_1$) *l'u sur l'autre.* C'est le roulement de ($\Theta$) sur ($\Theta_1$) si l'on considè les points (X′, Y′, Z′) comme appartenant à la figure mobil c'est le mouvement inverse, si l'on considère au contraire comr mobile la figure qui est lieu des points ($X'_1$, $Y'_1$, $Z'_1$).

Pour établir ce résultat essentiel, considérons X′, Y′, Z′ comr appartenant à la figure mobile. Si nous remplaçons, dans les fc mules (30), X′, Y′, Z′ par les valeurs (15) qui correspondent à ı point de la surface ($\Theta$), elles nous donneront les valeurs (15)′ ‹ $X'_1$, $Y'_1$, $Z'_1$. Donc déjà le déplacement se produit de telle maniè qu'à chaque instant le point de la surface ($\Theta$), considérée comr appartenant à la figure mobile, coïncide avec le point correspo dant de ($\Theta_1$). Pour compléter la démonstration, différentio totalement, avant toute hypothèse, les formules (30). La premièr par exemple, nous donnera

$$dX' + c_1\,dY' - b_1\,dZ' = dX'_1 - c_1\,dY'_1 + b_1\,dZ'_1 - dc_1(Y' + Y'_1 - y) + db_1(Z' + Z'_1 - z),$$

pourvu que nous remplacions $dx_1$ par sa valeur déduite des rel tions (45) [p. 66]. Or, si nous substituons, dans cette relatic générale, à Y′, $Y'_1$, Z′, $Z'_1$ les valeurs qu'elles acquièrent pour point commun à ($\Theta$) et à ($\Theta_1$), les coefficients de $db_1$, $dc_1$ d viennent nuls, et il reste la première des trois relations suivant

$$\begin{aligned} dX' + c_1\,dY' - b_1\,dZ' &= dX'_1 - c_1\,dY'_1 + b_1\,dZ'_1, \\ -c_1\,dX' + dY' + a_1\,dZ' &= c_1\,dX'_1 + dY'_1 - a_1\,dZ'_1, \\ b_1\,dX' - a_1\,dY' + dZ' &= -b_1\,dX'_1 + a_1\,dY'_1 + dZ'_1, \end{aligned}$$

les deux dernières se déduisant de la première par de simples permutations circulaires. Or ces trois équations, qui sont celles que l'on obtiendrait en différentiant les formules de transformation (30) *où les coefficients seraient traités comme des constantes,* expriment évidemment que le point commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$ a le même déplacement en grandeur et en direction quand on le considère, soit comme appartenant à la figure mobile, c'est-à-dire à $(\Theta)$, soit comme appartenant à la figure fixe, c'est-à-dire à $(\Theta_1)$. Ces deux surfaces sont donc applicables l'une sur l'autre, ce que nous savions déjà; et le mouvement considéré est le roulement de l'une sur l'autre.

**964.** Les raisonnements qui précèdent s'appliquent sans modification si, au lieu de prendre, comme point de départ, les formules (45) [p. 66] on emploie les formules (5) [p. 49]. On est alors conduit à la substitution linéaire définie par les équations

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} X' + cY' - bZ' &= -(X'_1 - x) + c(Y'_1 - y_1) - b(Z'_1 - z_1),\\ -cX' + Y' + aZ' &= -c(X'_1 - x_1) - (Y'_1 - y) + a(Z'_1 - z_1),\\ bX' - aY' + Z' &= b(X'_1 - x_1) - a(Y'_1 - y_1) - (Z'_1 - z), \end{aligned}\right.$$

toutes pareilles aux formules (30). Seulement, par suite du changement de signe de $X'$, $Y'$, $Z'$, elles ne représentent plus un déplacement, mais une transformation par symétrie relative à l'origine des coordonnées, suivie d'un déplacement. On démontrera comme précédemment que, lorsque varient les paramètres dont dépendent $a$, $x$, $x_1$, ..., ces formules définissent le roulement sur $(\Theta_1)$, non plus de $(\Theta)$, mais de la surface symétrique $(\Theta')$.

**965.** Les formules précédentes permettent de vérifier quelques-uns des résultats que nous a fournis la Géométrie dans l'étude qui a fait l'objet du Chapitre précédent. Appliquons-les, par exemple, à la détermination des systèmes cycliques que l'on peut faire dériver du couple de surfaces applicables $(\Theta)$, $(\Theta_1)$. Si, dans les formules (30), on attribue à $X'$, $Y'$, $Z'$ des valeurs constantes quelconques, elles fourniront les coordonnées $X'_1$, $Y'_1$, $Z'_1$ du point-sphère qui coupe le plan de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$ suivant le cercle (C), dont les différentes positions engendrent le système cyclique cherché. Soit A le point invariablement lié à la figure mo-

bile : si, par ce point, on mène une droite isotrope déterminée, c'est-à-dire invariablement liée au système mobile, les formules (30) permettront évidemment d'écrire les équations de cette droite rapportée au système fixe; et le point où elle coupera le plan de contact décrira une des trajectoires orthogonales du cercle (C). Ces trajectoires orthogonales se détermineront ainsi *sans aucune intégration;* mais, pour déterminer aussi en termes finis les deux autres familles qui composent le système triple, il faudra pouvoir intégrer l'équation du système conjugué commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$ (¹).

On obtiendra des résultats identiques en appliquant la méthode précédente, non plus aux équations (30), mais aux formules (31).

Supposons, par exemple, que l'on veuille déterminer le système cyclique obtenu en choisissant l'origine des coordonnées comme point fixe du système mobile. Il faudra, dans les formules de transformation (30) ou (31), introduire l'hypothèse

$$X' = Y' = Z' = 0.$$

Les premières (30) deviendront alors identiques aux équations (28) et fourniront par suite un premier point de contact de la sphère $(U_1)$ (nos 957, 961) avec son enveloppe. Les secondes (31) deviendront de même identiques aux formules (27) et fourniront le second point où la même sphère $(U_1)$ touche son enveloppe. Ce sera le point de contact défini par les formules (28) ou (30) qui deviendra fixe dans l'espace lorsque la surface $(\Theta_1)$ se déformera de manière à venir coïncider avec $(\Theta)$. Ce sera au contraire le second, défini par les formules (27) ou (31), qui deviendra fixe

(¹) De là résulte qu'à toute équation linéaire du second ordre dont les invariants sont égaux on peut faire correspondre une infinité de systèmes cycliques dont les trois familles se détermineront par de simples quadratures. Car on peut, à l'aide d'une telle équation, déterminer une infinité de couples de surfaces (S), $(S_1)$ et, par suite, $(A_1)$, $(\Sigma_1)$, se correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires. Le couple de surfaces applicables déduit de $(A_1)$, $(\Sigma_1)$ admettra, pour réseau conjugué commun, le réseau conjugué commun à $(A_1)$, $(\Sigma_1)$, c'est-à-dire, d'après le Tableau de la page 72, le réseau des lignes asymptotiques de (S). Or ce réseau est entièrement connu; les paramètres des lignes qui le composent sont les variables indépendantes qui figurent dans l'équation linéaire à invariants égaux prise comme point de départ.

si $(\Theta_1)$ se déforme de manière à venir coïncider non plus avec $(\Theta)$, mais avec la surface symétrique $(\Theta')$.

**966.** Nous pouvons maintenant expliquer de la manière la plus satisfaisante pourquoi ces deux points se trouvent respectivement dans les plans tangents de (S) et de $(S_1)$. D'après les théories connues, le déplacement défini par les formules (30) peut être remplacé, d'une infinité de manières, par une translation finie et par une rotation, toujours la même, dont l'axe et la valeur absolue dépendent uniquement des coefficients $a_1$, $b_1$, $c_1$. Si $\Omega$ désigne la grandeur de cette rotation et $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les angles que fait avec les axes coordonnés la direction positive de l'axe de la rotation, on a, comme on sait,

$$\frac{a_1}{\cos\lambda} = \frac{b_1}{\cos\mu} = \frac{c_1}{\cos\nu} = -\operatorname{tang}\frac{\Omega}{2}. \tag{32}$$

On voit ainsi que l'axe de la rotation est perpendiculaire au plan tangent de $(S_1)$. D'après cela, soient M, $M_1$ les points correspondants de (S) et de $(S_1)$, $P_1$ le milieu du segment $MM_1$. Si l'on mène, par l'origine des coordonnées, une droite OP égale, parallèle au segment $M_1P_1$ *et de même sens,* il résulte des formules (14) et (15) que les deux points P et $P_1$ décriront, l'un la surface $(\Theta)$, l'autre la surface $(\Theta_1)$. Pour amener les deux surfaces en contact on pourra, par une translation, amener P en $P_1$, *ce qui fera coïncider* O *avec* $M_1$; puis effectuer la rotation définie par les formules (32); et, comme l'axe de cette rotation est évidemment perpendiculaire au plan tangent en $M_1$ à $(S_1)$, elle laissera le point O dans ce plan tangent.

Une démonstration identique s'appliquera au second point défini par les formules (27), pourvu que l'on substitue à la surface $(\Theta)$ sa symétrique relative à l'origine des coordonnées.

**967.** D'autres formules, qu'il ne sera pas inutile d'indiquer rapidement, permettent encore de définir le roulement de deux surfaces l'une sur l'autre.

Si l'on connaît, par exemple, pour chacune des deux surfaces $(\Theta)$, $(\Theta_1)$, les cosinus qui définissent, par rapport à des axes fixes, la position d'un trièdre (T), rattaché de la même manière

à ces surfaces, il est clair que les formules

$$(33)\qquad \begin{cases} X' = x + a x' + b y' + c z', \\ Y' = y + a' x' + b' y' + c' z', \\ Z' = z + a'' x' + b'' y' + c'' z', \end{cases}$$

où $x$, $y$, $z$ désignent maintenant les coordonnées du point M de $(\Theta)$ qui est le sommet du trièdre (T), et où nous conservons, pour les cosinus, toutes les notations du Livre V, Chap. I et II, définiront le changement de coordonnées par lequel on passe des axes fixes $OX'$, $OY'$, $OZ'$ aux axes $Mx'$, $My'$, $Mz'$ formés par les arêtes du trièdre (T). Si l'on écrit les formules analogues relatives à la surface $(\Theta_1)$

$$(34)\qquad \begin{cases} X'_1 = x_1 + a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \\ Y'_1 = y_1 + a'_1 x' + b'_1 y' + c'_1 z', \\ Z'_1 = z_1 + a''_1 x' + b''_1 y' + c''_1 z', \end{cases}$$

l'élimination de $x'$, $y'$, $z'$ entre les deux systèmes précédents donnera les formules cherchées qui définissent le roulement de $(\Theta)$ sur $(\Theta_1)$. Cette élimination ne présente aucune difficulté, l'un et l'autre système pouvant être résolus par rapport à $x'$, $y'$, $z'$ : on obtient ainsi les formules

$$(35)\qquad \begin{cases} \mathbf{S}\, a(X' - x) = \mathbf{S}\, a_1(X'_1 - x_1), \\ \mathbf{S}\, b(X' - x) = \mathbf{S}\, b_1(X'_1 - x_1), \\ \mathbf{S}\, c(X' - x) = \mathbf{S}\, c_1(X'_1 - x_1), \end{cases}$$

qui peuvent elles-mêmes être résolues, soit par rapport à $X'$, $Y'$ $Z'$, soit par rapport à $X'_1$, $Y'_1$, $Z'_1$.

Si l'on veut, par exemple, trouver les systèmes cycliques qui correspondent au roulement de $(\Theta)$ sur $(\Theta_1)$, il suffira d'écrire les deux équations suivantes :

$$(36)\qquad \begin{cases} (X' - h)^2 + (Y' - k)^2 + (Z' - l)^2 = 0, \\ c(X' - x) + c'(Y' - y) + c''(Z' - z) = 0, \end{cases}$$

où $h$, $k$, $l$ désignent trois constantes, et qui représentent, la première un point-sphère invariablement lié à $(\Theta)$, la seconde le

plan de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$, puis de substituer les expressions de $X'$, $Y'$, $Z'$ en fonction de $X'_1$, $Y'_1$, $Z'_1$.

968. Une autre méthode très simple peut encore être suivie. Nous avons vu au Chapitre VI de ce Livre quelle importance ont, en Géométrie, les sections de courbes ou de surfaces, rattachées à la surface mobile $(\Theta)$, par le plan de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$. On pourra les déterminer comme il suit.

Soit, par exemple,

$$F(X', Y', Z') = 0 \tag{37}$$

l'équation d'une surface rattachée aux axes invariablement liés à $(\Theta)$. Cherchons sa section par le plan de contact. Il est clair qu'un point de ce plan est défini par des formules telles que les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} X' &= x + \lambda\frac{\partial x}{\partial u} + \mu\frac{\partial x}{\partial v}, \\ Y' &= y + \lambda\frac{\partial y}{\partial u} + \mu\frac{\partial y}{\partial v}, \\ Z' &= z + \lambda\frac{\partial z}{\partial u} + \mu\frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

où $\lambda$ et $\mu$ désignent des arbitraires convenablement choisies; $x$, $y$, $z$ sont toujours les coordonnées du point de $(\Theta)$, exprimées en fonction des variables $u$ et $v$. Or, par la nature même des arbitraires $\lambda$ et $\mu$, on reconnaît immédiatement que le point défini par les formules précédentes sera rattaché aux axes invariablement liés à $(\Theta_1)$ par les formules semblables

$$\left\{\begin{aligned} X'_1 &= x_1 + \lambda\frac{\partial x_1}{\partial u} + \mu\frac{\partial x_1}{\partial v}, \\ Y'_1 &= y_1 + \lambda\frac{\partial y_1}{\partial u} + \mu\frac{\partial y_1}{\partial v}, \\ Z'_1 &= z_1 + \lambda\frac{\partial z_1}{\partial u} + \mu\frac{\partial z_1}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

*où $\lambda$ et $\mu$ conservent les mêmes valeurs*. Pour obtenir la section cherchée, il suffira donc d'éliminer $\lambda$ et $\mu$ entre les équations précédentes et la suivante :

$$F\left(x + \lambda\frac{\partial x}{\partial u} + \mu\frac{\partial x}{\partial v},\quad y + \lambda\frac{\partial y}{\partial u} + \mu\frac{\partial y}{\partial v},\quad z + \lambda\frac{\partial z}{\partial u} + \mu\frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0. \tag{40}$$

La méthode s'appliquerait évidemment à une courbe.

969. Jusqu'ici, dans l'étude des relations entre les systèı cycliques et la déformation des surfaces, nous ne nous somı pas préoccupé de la distinction à faire entre les éléments réel; les éléments imaginaires. Par exemple, si deux surfaces rée roulent l'une sur l'autre, les systèmes cycliques déduits des po reliés à l'une d'elles (Θ) sont toujours imaginaires; les cent des cercles correspondants à un point réel seront bien réels, n les rayons des cercles seront des imaginaires à carré négatif. moment est venu d'indiquer, en vue des applications, commen faudra choisir les surfaces (Θ), ($\Theta_1$) pour obtenir des systèı cycliques entièrement réels.

Les plans des cercles étant alors réels, la surface ($\Theta_1$) est cessairement réelle. Voyons ce que doit être (Θ), et, pour c reprenons les méthodes et les notations du Livre V.

Soient $p, q, r, p_1, q_1, r_1$ les rotations du trièdre (T) relié à ( $r$ et $r_1$ seront réelles et exprimées en fonction de l'élém linéaire, comme les translations $\xi$, $\eta$, $\xi_1$, $\eta_1$. D'ailleurs, si l'on c sidère le cercle situé dans le plan tangent de (Θ), les coordonn $x$, $y$ de son centre sont réelles ainsi que son rayon $\rho$; et si élève en ce centre une perpendiculaire égale à $i\rho$, le p $(x, y, i\rho)$ doit rester fixe dans l'espace quand le trièdre (T déplace de manière que son sommet décrive la surface (Θ). ( nous donne les relations suivantes

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \xi + iq\rho - ry = 0, \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} + \eta + rx - ip\rho = 0, \\ i\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + py - qx = 0, \end{cases} \qquad (41)' \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \xi_1 + iq_1\rho - r_1 y \cdot \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} + \eta_1 + r_1 x - ip_1\rho \\ i\dfrac{\partial \rho}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0, \end{cases}$$

par lesquelles on exprime que la vitesse de ce point est nulle p tout déplacement du trièdre (T). Ces relations prouvent en ] mier lieu que les quatre rotations $p$, $q$, $p_1$, $q_1$ *sont des ima naires pures*. Mais alors les formules qui donnent les déri des neuf cosinus exprimées en fonction des rotations mont immédiatement que l'on peut rapporter la surface (Θ) à des tels que tous les cosinus soient réels, sauf $a''$, $b''$, $c$, $c'$ qui se purement imaginaires. Donc les coordonnées X′, Y′ du p

de $(\Theta)$ définies par les formules

$$dX' = a(\xi\, du + \xi_1\, dv) + b(\eta\, du + \eta_1\, dv),$$
$$dY' = a'(\xi\, du + \xi_1\, dv) + b'(\eta\, du + \eta_1\, dv)$$

seront réelles tandis que $Z'$, définie par la quadrature

$$dZ' = a''(\xi\, du + \xi_1\, dv) + b''(\eta\, du + \eta_1\, dv),$$

sera une imaginaire pure $iZ''$. L'élément linéaire de la surface sera de la forme

$$dX'^2 + dY'^2 - dZ''^2,$$

$X'$, $Y'$, $Z''$ étant réels.

C'est ici le lieu de présenter la remarque suivante : lorsque nous avons formé (n° 704) l'équation à laquelle satisfait l'une des coordonnées $X'$, $Y'$, $Z'$, nous avons indiqué que la forme quadratique

$$ds^2 - dX'^2$$

n'était pas nécessairement une somme de carrés. On voit que, lorsqu'elle se réduira à une différence de carrés, on n'aura plus de surface réelle correspondant à la solution $X'$, mais on pourra, si l'on connaît déjà une surface réelle admettant l'élément linéaire donné, déduire de la nouvelle solution des systèmes cycliques réels (¹).

970. Au reste, lorsque l'on aura constitué un système cyclique réel, on pourra passer à tous ceux qui se rattachent au même roulement par la construction réelle suivante, que le lecteur déduira facilement des remarques présentées au n° 943.

Associons à chaque cercle (C) du système donné un autre cercle (C′) de son plan, défini par la construction que voici. Aux points où le cercle (C) rencontre deux surfaces déterminées à l'avance parmi toutes celles qui le coupent à angle droit, con-

---

(¹) Les formules (41), (41)′ peuvent servir de base à une étude analytique très simple de la congruence engendrée par les axes des cercles dans un système cyclique.

struisons les tangentes, qui seront les normales à ces surfaces tr jectoires; puis menons un cercle (C′) tangent à ces deux droi en des points qui soient toujours à la même distance de ceux ces droites touchent le cercle (C). En d'autres termes, détermino le cercle (C′) par la condition que deux des tangentes commur à (C) et à (C′) aient une longueur donnée et que leurs points contact avec (C) soient sur deux surfaces trajectoires données même cercle. Les différentes positions du cercle (C′) engend ront l'un quelconque des systèmes cycliques cherchés.

Les cercles (C′) dépendent de trois paramètres; les tangen communes à deux cercles (C′) différents, situés dans le même pl les touchent évidemment, d'après ce qui précède, en des poi qui décrivent une de leurs surfaces trajectoires.

Dans toute cette théorie, il faut considérer les cercles com ayant des rayons de *signes déterminés,* n'admettant qu'un s centre de similitude et deux tangentes communes qui vont pas par ce centre. Par exemple, si les cercles sont réels, ce sera centre de similitude directe quand les rayons auront le mê signe, et le centre de similitude inverse quand ils seront de sig contraires. Cette théorie du signe du rayon est connue dep longtemps; elle a servi de base à la théorie des *cycles* de Laguer Le lecteur pourra aussi consulter un Mémoire *Sur les relati entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans plan et dans l'espace,* inséré par l'auteur en 1872 dans Tome I, 2e série, des *Annales de l'École Normale.*

**971.** Lorsque la surface $(\Theta)$ roule sur la surface $(\Theta_1)$, une veloppable isotrope $(\Delta)$, invariablement liée à $(\Theta)$, coupe le p de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$ suivant une courbe (K) dont les sitions successives engendrent une congruence. Nous av vu (n° 762) que ces positions successives sont normales à famille de surfaces. Dans la Note déjà citée [p. 120] Ribauc indique comme une propriété nouvelle que cette famille de s faces est une *famille de Lamé,* c'est-à-dire qu'elle fait pa d'un système triple orthogonal. Mais cette remarque avait déjà donnée depuis longtemps dans mon enseignement, et l'o est conduit d'ailleurs avec la plus grande facilité. Considérons effet les points-sphères ayant leur centre sur la développable (

ils coupent le plan de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$ suivant des cercles $(C')$ tous tangents à $(K)$; et si l'on considère un point-sphère *déterminé* A, la trajectoire du point de contact de $(K)$ et du cercle $(C')$ qui correspond à A est précisément une surface $(\Sigma')$ normale à $(C')$ et, par suite, à $(K)$. Supposons maintenant que le point de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$ se déplace suivant une des courbes du système conjugué commun. Le point de contact du cercle $(C')$ et de $(K)$ décrira une ligne de courbure de $(\Sigma')$. Ainsi il existe *deux* séries de déplacements dans lesquels *chaque* point de $(K)$ décrit une ligne de courbure de la trajectoire orthogonale. En d'autres termes, on peut associer les courbes $(K)$ en deux familles différentes, de manière à constituer un système triple orthogonal.

**972.** On peut compléter encore ces résultats en remarquant que l'on obtient ainsi tous les systèmes triples orthogonaux dans lesquels les surfaces de l'une des deux familles (et, par suite, de deux familles) aient leurs lignes de courbure planes dans un système. Voici comment nous démontrons cette réciproque.

On doit à Ribaucour la proposition générale suivante, relative aux systèmes triples orthogonaux :

*Lorsque l'on connaît un système triple orthogonal, les cercles osculateurs aux courbes d'intersection des surfaces appartenant à deux des familles du système, aux points où ces courbes rencontrent une surface quelconque de la troisième famille, forment un système cyclique* [1].

---

[1] On peut démontrer cette proposition par la Géométrie de la manière suivante : Soit (S) une surface quelconque appartenant à la première famille et soit (K) la courbe d'intersection de deux surfaces $(S_2)$, $(S_3)$ appartenant respectivement à la deuxième et à la troisième famille. Si l'on construit les deux sphères tangentes à $(S_2)$ et à $(S_3)$ respectivement, et contenant le cercle osculateur (C) de (K) au point M où cette courbe rencontre la surface (S), ces deux sphères auront pour centres respectivement les centres de courbure principaux de $(S_2)$ et de $(S_3)$ relatifs à la ligne (K). Par suite, lorsque le point M décrira la ligne de courbure de (S) qui se trouve sur $(S_2)$, la première sphère enveloppera une surface qu'elle touchera suivant les positions successives du cercle (C) (n° 752). Il en sera de même pour la seconde sphère quand le point M décrira l'intersection de (S) et de $(S_3)$. On voit donc que les cercles (C) peuvent être associés en

On peut compléter cette proposition par la suivante, qui n'est pas moins utile, et dont la démonstration sera mieux à sa place dans une théorie des systèmes orthogonaux.

*Réciproquement, étant donnée une famille de surfaces, construisons les cercles osculateurs aux courbes trajectoires orthogonales de ces surfaces, aux points où ces courbes rencontrent une surface quelconque de la famille; la détermination de ces cercles est toujours possible et n'exige nullement l'intégration des équations différentielles des trajectoires orthogonales. Cela posé, si les cercles osculateurs ainsi définis forment toujours un système cyclique, la famille de surfaces considérée est une famille de Lamé.*

Ces propositions étant admises, donnons-nous *a priori* un système orthogonal dans lequel les surfaces $(S_2)$, $(S_3)$ de la deuxième et de la troisième famille se coupent suivant des courbes planes (K). Soit ($\Delta$) l'une des deux développables isotropes passant par (K) : si M est un point de (K) et M' le point correspondant de l'arête de rebroussement de ($\Delta$), la sphère de rayon nul ayant son centre en M' coupera le plan de (K) suivant le cercle (C), osculateur en M. Toutes les positions de (C), relatives aux points M où les courbes (K) rencontrent une des surfaces (S) de la première famille, constituent un système cyclique, d'après le théorème de Ribaucour. Pour *tous* ces systèmes cycliques, les enveloppes de sphères $(E_2)$, $(E_3)$, qui forment la deuxième et la troisième famille, coupent sous le même angle le plan de l'une quelconque des courbes (K), cet angle étant celui sous lequel ce plan est coupé par l'une ou l'autre des surfaces $(S_2)$ ou $(S_3)$ qui contiennent cette courbe. Or, considérons la surface $(\Theta_1)$, enveloppe des plans des courbes (K) : si elle se déforme en entraînant dans ses plans tangents les courbes (K) et leurs cercles oscula-

---

deux familles d'enveloppes de sphères $(E_2)$, $(E_3)$ qui se coupent à angle droit puisque, étant orthogonales à (S), elles coupent cette surface suivant ses différentes lignes de courbure. Les surfaces $(E_2)$, $(E_3)$ se coupant de plus suivant une des positions du cercle (C), c'est-à-dire suivant une ligne de courbure, il existera une troisième famille de surfaces, dont (S) fera partie, qui seront normales aux positions successives du cercle (C) et qui compléteront le système triple orthogonal.

teurs, les surfaces trajectoires ($\Sigma$) des courbes (K) se transforment dans les trajectoires orthogonales ($\Sigma'$) des nouvelles positions de ces courbes (n° 760); les cercles osculateurs à ces courbes, aux différents points de chaque surface ($\Sigma$), deviennent les cercles osculateurs en tous les points de la surface correspondante ($\Sigma'$); et, *comme ils ne cessent pas de former des systèmes cycliques,* il résulte de la réciproque énoncée plus haut que *les nouvelles trajectoires* ($\Sigma'$) *forment toujours une famille de Lamé.* Ainsi toutes les propriétés précédentes subsisteront sans modification. Or il existe une déformation ($\Theta$) de ($\Theta_1$) dans laquelle tous les cercles (C) de l'un des systèmes cycliques précédents viennent se placer sur une même sphère de rayon nul ayant son centre en un point déterminé de l'arête de rebroussement de la développable ($\Delta$). Les enveloppes de sphères ($E_2$), ($E_3$) relatives à ce système se réduiront toutes à cette sphère de rayon nul et couperont, par suite, le plan de la courbe (K) sous un angle dont la tangente sera $i$. Cet angle étant le même pour tous les autres systèmes cycliques formés de cercles osculateurs à la courbe (K), il résultera de là que, pour chacun de ces systèmes, les cercles viendront se placer sur une même sphère de rayon nul et que, par suite, toutes les développables isotropes circonscrites aux courbes (K) auront la même arête de rebroussement et viendront se confondre avec l'une quelconque d'entre elles. C'est la proposition qu'il s'agissait d'établir [1].

973. Les relations géométriques qui résultent de l'étude précédente nous permettent de constituer *sans aucune intégration* les systèmes orthogonaux dont l'existence vient d'être établie dès

---

[1] Les systèmes orthogonaux dans lesquels une des trois séries de trajectoires orthogonales est composée de courbes planes ont été considérés pour la première fois par M. O. Bonnet dans un *Mémoire sur les surfaces orthogonales,* inséré par extrait en 1862 aux *Comptes rendus,* t. LIV, p. 554 et 655. La méthode suivie par l'éminent géomètre exigeait encore certaines intégrations; mais il l'a complétée depuis en la faisant connaître dans son enseignement, bien qu'il n'ait rien écrit depuis 1862 sur ce sujet. En 1890-1891, M. Bianchi a fait paraître au t. XIX des *Annali di Matematica,* p. 177, un Mémoire intitulé : *Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane,* où la détermination de ces systèmes orthogonaux est faite de la manière la plus complète. A la même époque, dans notre Cours sur

que l'on connaît un système cyclique quelconque. Étant donné, en effet, un tel système, engendré par les différentes positions d'un cercle (C), choisissons une position de ce cercle, arbitraire mais fixe; et, dans le plan de cette position particulière, construisons, d'après les règles données au n° 970, une famille quelconque de cercles (C'). Construisons, par exemple, une série de cercles (C') tangents à une courbe quelconque de ce plan. Les cercles (C') engendreront une suite simplement *infinie*, une famille de systèmes cycliques. Le système cherché sera, en quelque sorte, l'enveloppe de tous ces systèmes; c'est-à-dire que toutes les positions des cercles (C') qui seront dans un même plan envelopperont la courbe (K) relative à ce plan et que la surface décrite par le point de contact de l'un des cercles (C') et de cette courbe (K) sera une trajectoire orthogonale de la courbe. Les deux autres familles du système orthogonal correspondront aux deux autres familles du système cyclique donné.

Il est clair que cette génération dispense de tout calcul. Il résultera des remarques faites plus loin que les formes les plus simples des courbes (K) sont, après les cercles, les sections planes de la développable isotrope du quatrième ordre.

---

les systèmes triples orthogonaux, nous donnions, en même temps que les résultats indiqués dans le texte, une autre méthode qui repose sur la remarque, évidente d'après les développements donnés plus haut, que les systèmes cherchés ont même représentation sphérique qu'une infinité de systèmes cycliques. Cette remarque permet de les déduire des systèmes cycliques par l'application d'un théorème de Combescure, qui rattache à tout système orthogonal une infinité de systèmes analogues admettant la même représentation sphérique. Nous reviendrons sur ce sujet plus loin, au Chapitre XII.

# CHAPITRE VIII.

## REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE. SOLUTION COMPLÈTE DU PROBLÈME.

Emploi des coordonnées tangentielles $\alpha$, $\beta$, $\xi$. — Réduction du problème de la représentation sphérique à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre dont les invariants sont égaux. — Les caractéristiques de cette équation sont les lignes de courbure de la surface. — Rapprochement entre les deux surfaces qui conduisent à la même équation du second ordre, l'une pour le problème de la déformation infiniment petite, l'autre pour le problème de la représentation sphérique. — On retrouve la transformation de contact de M. Lie. — Notions générales sur une classe étendue de transformations de contact. — Application à celle de M. Lie. — Recherche des surfaces pour lesquelles on sait résoudre le problème de la représentation sphérique. — On démontre que, lorsqu'on sait résoudre ce problème pour une surface $(\Sigma)$, on peut le résoudre, à l'aide d'une simple quadrature, pour toutes les surfaces inverses des surfaces $(\Sigma')$ admettant même représentation sphérique que $(\Sigma)$. — Ce procédé, appliqué aux surfaces qui correspondent à l'équation $\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}=0$, fournit toutes les surfaces réelles pour lesquelles on peut obtenir la solution complète du problème. — Démonstration analytique de ce résultat. — Compléments donnés aux développements du Livre IV, Chap. VII.

---

974. Pour approfondir les relations que nous avons signalées entre les deux problèmes de la représentation sphérique et de la déformation infiniment petite, nous ferons connaître ici une méthode analytique, différente de celle qui a été développée dans le Chapitre précédent, et par laquelle on ramène la détermination de toutes les surfaces admettant une représentation sphérique donnée à l'intégration d'une équation linéaire du second ordre dont les invariants sont égaux.

Nous avons vu (n° 165) que, si l'on prend l'équation du plan tangent à une surface $(\Sigma)$ sous la forme

$$(\alpha+\beta)X+i(\beta-\alpha)Y+(\alpha\beta-1)Z+\xi=0, \tag{1}$$

$\xi$ étant une fonction des variables $\alpha$ et $\beta$, les lignes de courbure

de la surface sont définies par l'équation différentielle

$$dp'\,d\alpha - dq'\,d\beta = 0, \tag{2}$$

où $p'$ et $q'$ désignent les dérivées de $\xi$ prises par rapport à $\alpha$ et à $\beta$. Si donc on choisit comme variables indépendantes les paramètres $\rho$ et $\rho_1$ des deux familles de lignes de courbure, on aura nécessairement

$$\frac{\partial p'}{\partial \rho}\frac{\partial \alpha}{\partial \rho} - \frac{\partial q'}{\partial \rho}\frac{\partial \beta}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial p'}{\partial \rho_1}\frac{\partial \alpha}{\partial \rho_1} - \frac{\partial q'}{\partial \rho_1}\frac{\partial \beta}{\partial \rho_1} = 0. \tag{3}$$

En appliquant la méthode du n° 867, on peut remplacer ces deux relations par les deux systèmes

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial \rho} &= \lambda^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial \rho_1} &= -\lambda^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_1}; \end{aligned} \right. \qquad (5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial \rho} &= \lambda^2 \frac{\partial q'}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial p'}{\partial \rho_1} &= -\lambda^2 \frac{\partial q'}{\partial \rho_1}, \end{aligned} \right.$$

où $\lambda^2$ désigne une fonction auxiliaire. Cette fonction sera évidemment connue dès que la représentation sphérique sera donnée, car alors $\alpha$ et $\beta$ seront des fonctions connues de $\rho$ et de $\rho_1$. Si donc on veut déterminer toutes les surfaces admettant la représentation sphérique donnée, il faudra déterminer les solutions les plus générales $p'$ et $q'$ du système (5); puis, la fonction $\xi$ s'obtiendra par la quadrature

$$\xi = \int (p'\,d\alpha + q'\,d\beta). \tag{6}$$

Or, le système (5) est précisément de la forme que nous avons considérée tant de fois (n$^{os}$ 391, 868); et nous savons que son intégration complète se ramène à celle d'une équation à invariants égaux définie par la condition d'admettre comme solution particulière soit $\lambda$, soit $\frac{1}{\lambda}$. Il est donc établi que *la solution du problème de la représentation sphérique se ramène, comme celle du problème de la déformation infiniment petite, à l'intégration d'une équation linéaire à invariants égaux*. Seulement, les caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles sont, dans le premier cas, les lignes de courbure et, dans le second cas, les lignes asymptotiques de la surface. Nous allons voir qu'en

essayant de rattacher l'une à l'autre les deux surfaces qui conduisent, dans ces deux problèmes différents, à la même équation aux dérivées partielles, on retrouve la transformation de contact déjà signalée plus haut (nos 157, 168) que nous devons à M. Lie.

975. Déterminons, en coordonnées cartésiennes, une surface (S) par les formules suivantes

$$(7) \qquad x = -p', \qquad y = \beta, \qquad z = \xi - p'\alpha,$$

d'où l'on déduit

$$dz = d\xi - p'\,d\alpha - \alpha\,dp' = -\alpha\,dp' + q'\,d\beta,$$

ou encore

$$(8) \qquad dz = \alpha\,dx + q'\,dy.$$

Si l'on considère $z$ comme fonction de $x$ et de $y$, et si, suivant l'usage, on désigne ses dérivées premières par $p$ et $q$, on voit que l'on aura

$$(9) \qquad p = \alpha, \qquad q = q'.$$

Rapprochées des précédentes (7), ces relations conduisent à l'identité

$$(10) \qquad dp'\,d\alpha - dq'\,d\beta = -dp\,dx - dq\,dy,$$

d'où il résulte que *les lignes de courbure de la surface* ($\Sigma$) *correspondent aux lignes asymptotiques de la surface* (S). Mais nous voyons de plus que les deux systèmes (4) et (5) relatifs à la surface ($\Sigma$) se changeront dans les suivants

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \lambda^2 \dfrac{\partial p}{\partial \rho}, \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial \rho_1} = -\lambda^2 \dfrac{\partial p}{\partial \rho_1}; \end{cases} \qquad (12) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} = -\lambda^2 \dfrac{\partial q}{\partial \rho}, \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \rho_1} = \lambda^2 \dfrac{\partial q}{\partial \rho_1}, \end{cases}$$

identiques, aux notations près, à ceux qui ont été donnés au n° 867 [p. 21]; de sorte que la solution du problème de la déformation infiniment petite de (S) et la détermination de toutes les surfaces admettant la même représentation sphérique que ($\Sigma$) se ramènent à l'intégration d'un même système linéaire de la forme

suivante

$$(13)\qquad \frac{\partial u}{\partial \rho} = \lambda^2 \frac{\partial v}{\partial \rho}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho_1} = -\lambda^2 \frac{\partial v}{\partial \rho_1},$$

c'est-à-dire à l'intégration de l'équation linéaire

$$(14)\qquad \frac{1}{\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \rho\, \partial \rho_1}.$$

**976.** Il ne sera pas inutile d'indiquer ici les formules qui permettent de passer de la surface (S) à la surface ($\Sigma$). Soient X, Y, Z les coordonnées rectangulaires du point de ($\Sigma$); elles sont définies par les équations (n° 165)

$$(15)\qquad \begin{cases} (X+iY)\beta + (X-iY)\alpha + (\alpha\beta - 1)Z + \xi = 0, \\ X+iY \quad + \alpha Z + q' = 0, \\ X-iY \quad + \beta Z + p' = 0. \end{cases}$$

Si l'on y remplace $\alpha$, $\beta$, $\xi$, $p'$, $q'$ par leurs expressions tirées des formules (7) et (9), on trouvera le système

$$(16)\qquad \begin{cases} X-iY \quad + yZ - x = 0, \\ (X+iY)y - \quad Z + z = 0, \\ X+iY \quad + pZ + q = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tirerait X, Y, Z en fonction de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$. Ces formules caractérisent précisément la transformation de M. Lie, et les deux premières, qui ne contiennent pas les dérivées $p$ et $q$ de $z$, contiennent implicitement la troisième, d'après la théorie des transformations de contact. Nous allons rappeler rapidement sur quels principes repose la théorie de la transformation précédente; et pour cela nous considérerons d'une manière générale toutes les transformations de contact que l'on peut rattacher à la considération de deux équations de la forme suivante

$$(17)\qquad \begin{cases} \varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \\ \varphi_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0. \end{cases}$$

Ces relations établissent une liaison entre les coordonnées $x$, $y$, $z$ et X, Y, Z de deux points $m$ et M de l'espace. Si le point $m$ est donné, le point M est assujetti à se trouver sur une courbe (C); et si l'on a donné le point M, le point $m$ est assujetti à se trouver

sur une courbe $(c)$. Suivant que l'on y considère $x$, $y$, $z$ ou X, Y, Z comme des constantes, les deux équations précédentes représentent la courbe (C) ou la courbe $(c)$.

D'après cela, si le point $m$ est assujetti à décrire une surface $(s)$, les courbes (C) qui lui correspondent dépendront de deux paramètres et engendreront une congruence qui admettra une surface focale (S). Faisons correspondre (S) à $(s)$ de telle manière qu'au point $m$ de $(s)$ corresponde l'un quelconque des points M où la courbe (C) correspondante touche la surface focale (S), c'est-à-dire en définitive un des points focaux de (C). Nous aurons ainsi défini la transformation de contact que l'on peut rattacher aux deux équations (17); et il est aisé de voir que cette définition subsiste lorsqu'on échange les deux points M et $m$. Pour abréger, nous nous contenterons de donner la démonstration analytique.

977. Supposons que le point $m$ décrive une surface $(s)$ et soient alors $p$ et $q$ les dérivées de $z$ considérée comme une fonction de $x$ et de $y$. A chaque point de $(s)$ correspond une courbe (C) définie par les équations (17); et, pour avoir les points focaux de cette courbe, il faut joindre à ces deux équations les suivantes (n° 315)

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = 0,\\ &\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}dz = 0,\end{aligned}\right.$$

qui nous donneront, en remplaçant $dz$ par sa valeur $p\,dx + q\,dy$ et éliminant le rapport de $dy$ à $dx$,

$$(19)\qquad \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + p\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + p\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} + q\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}}.$$

Cette équation, que l'on peut mettre sous la forme plus symétrique

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & -p\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} & -q\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

doit être jointe aux deux précédentes (17) et permettra de déterminer X, Y, Z en fonction de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$. Le point M qui correspond à $m$ sera ainsi défini.

Mais alors différentions totalement les équations (17) et formons la combinaison $d\varphi - \lambda\, d\varphi_1$ où $\lambda$ désigne la valeur commune des rapports (19). En tenant compte des équations

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + p\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} - \lambda\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + p\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} - \lambda\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} + q\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right) = 0, \end{cases}$$

qui définissent cette variable auxiliaire $\lambda$, on aura identiquement

$$0 = d\varphi - \lambda\, d\varphi_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X} - \lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial X}\right)dX + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y} - \lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial Y}\right)dY + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z} - \lambda\frac{\partial\varphi_1}{\partial Z}\right)dZ,$$

ou, en désignant par P et Q les dérivées de Z considérée comme fonction de X et de Y et remplaçant $dZ$ par $P\,dX + Q\,dY$

$$\begin{aligned} 0 = &\left[\frac{\partial\varphi}{\partial X} + P\frac{\partial\varphi}{\partial Z} - \lambda\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial X} + P\frac{\partial\varphi_1}{\partial Z}\right)\right]dX \\ &+ \left[\frac{\partial\varphi}{\partial Y} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial Z} - \lambda\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Y} + Q\frac{\partial\varphi_1}{\partial Z}\right)\right]dY. \end{aligned}$$

X et Y étant des variables indépendantes comme $x$, $y$, on aura donc

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial X} + P\dfrac{\partial\varphi}{\partial Z} - \lambda\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial X} + P\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial Z}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial Y} + Q\dfrac{\partial\varphi}{\partial Z} - \lambda\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial Y} + Q\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial Z}\right) = 0. \end{cases}$$

Ces équations, jointes aux précédentes (17) et (21), permettront de déterminer l'un des deux groupes de variables $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ ou X, Y, Z, P, Q en fonction de l'autre. Comme elles se composent de la même manière avec ces deux groupes de variables, la réciprocité que nous avions signalée se trouve ainsi établie.

978. Appliquons ces notions générales, que nous nous contentons de signaler à grands traits, au cas particulier des deux équations

$$(23)\quad \begin{cases} (X + iY)y - Z + z = 0, \\ X - iY + yZ - x = 0. \end{cases}$$

Ici la ligne (C) est toujours une droite *isotrope*. La ligne ($c$) qui correspond au point M(X, Y, Z) est une certaine droite appartenant à un complexe linéaire H que l'on définit comme il suit :

Si l'on adopte les définitions du n° **139**, la droite lieu du point ($x$, $y$, $z$), définie par les formules précédentes, aura ses six coordonnées définies à un facteur près par les relations

$$(24)\quad \begin{cases} a = \phantom{-}Z, & b = 1, & c = -X - iY, \\ a' = -Z, & b' = X^2 + Y^2 + Z^2, & c' = \phantom{-}X - iY, \end{cases}$$

et, par suite, elle appartient nécessairement au complexe H défini par l'équation

$$(25)\qquad a + a' = 0.$$

Il faudra joindre aux deux équations (23) les suivantes

$$(26)\ \begin{cases} p + \lambda = 0, \\ X + iY + q - \lambda Z = 0, \end{cases} \qquad (27)\ \begin{cases} y - P - \lambda(1 + Py) = 0, \\ iy - Q + \lambda(i - yQ) = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit les deux systèmes

$$(28)\ \begin{cases} Z = \dfrac{z - qy}{1 + py}, \\ X + iY = \dfrac{-q - pz}{1 + py}, \\ X - iY = \dfrac{x + y(px + qy - z)}{1 + py}, \\ P = \dfrac{y + p}{1 - py}, \\ Q = \dfrac{i(y - p)}{1 - py}. \end{cases} \qquad (29)\ \begin{cases} y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + P^2 + Q^2}}{P + iQ}, \\ x = yZ + X - iY, \\ z = Z - y(X + iY), \\ p = \dfrac{P - y}{1 + Py}, \\ q = \dfrac{y - P}{1 + Py} Z - X - iY, \end{cases}$$

qui sont résolus respectivement par rapport aux deux groupes de variables.

On voit que, si à un point $m$ correspond un seul point M, au contraire à un point M correspondent deux points $m$. Cela était évident *a priori* par la Géométrie. En effet, lorsque le point $m$ décrit une surface (S), la droite qui lui correspond engendre une congruence ; mais, comme cette droite est isotrope, elle a *un seul* point focal à distance finie. C'est cet unique point focal qui corres-

pond au point $m$. Au contraire, si M décrit une surface (S), la droite qui lui correspond engendre une congruence dans laquelle elle admet *deux* points focaux. Les deux nappes focales ainsi obtenues, qui, l'une et l'autre, correspondent à (S), sont polaires réciproques par rapport au complexe linéaire auquel appartiennent toutes les droites ($c$).

979. Ce n'est pas ici le lieu d'étudier, avec tout le soin qu'elle mérite, l'importante transformation de M. Lie. Nous nous contenterons d'en indiquer seulement certaines propriétés, dont nous aurons à faire usage; et, en premier lieu, nous démontrerons la plus importante de toutes pour les applications : *A une droite de l'espace* ($m$) *la transformation fait correspondre une sphère de l'espace* (M).

On peut établir cette proposition par les considérations géométriques suivantes, qui en font bien comprendre l'origine.

Soit ($d$) la droite donnée dans l'espace ($m$) et soit ($d_1$) sa polaire réciproque par rapport au complexe H. Toutes les droites qui rencontrent ($d$) et ($d_1$) appartiennent, comme on sait, à ce complexe. Aux différents points de ($d$) et de ($d_1$) correspondent des droites isotropes dans l'espace (M); de plus, les droites isotropes qui correspondent à un point $m$ de ($d$) et à un point $m_1$ de ($d_1$) se coupent nécessairement au point de l'espace (M) qui correspond à la droite $mm_1$ du complexe H. Il est ainsi établi que les droites isotropes correspondantes, soit aux points de ($d$), soit aux points de ($d_1$), engendrent une même surface qui, étant doublement réglée, ne pourra être qu'une sphère.

Si la droite ($d$) appartient au complexe H, elle se confond avec ($d_1$) et, par suite, les deux systèmes de génératrices rectilignes de la sphère se confondent. La sphère précédente se réduit à un point. Ce point est celui qui, dans l'espace (M), correspond à la droite ($d$).

Le lecteur vérifiera tous ces résultats par le calcul, en employant les formules (23) à (29).

980. D'après cela, si nous connaissons dans l'espace ($m$) une congruence rectiligne, il lui correspondra, dans l'espace (M), un système doublement infini de sphères. Aux points focaux de

chaque droite de la congruence correspondront les deux points où chaque sphère touche son enveloppe. De sorte que, des congruences rectilignes pour lesquelles les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale, la transformation de M. Lie permet de déduire des familles de sphères admettant une enveloppe à deux nappes sur lesquelles les lignes de courbure sont aussi des lignes correspondantes. Au Livre IV, Chapitre XV, nous avons étudié un grand nombre de propriétés de ces enveloppes de sphères; et, en particulier, au n° 483, nous avons déjà indiqué comment la transformation de M. Lie permet d'en déduire des congruences rectilignes pour lesquelles les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes focales.

Nous avons vu au n° 481, Livre IV, Chap. XV, que, pour obtenir des enveloppes de sphères à lignes de courbure correspondantes, il faut résoudre le problème de la représentation sphérique pour une surface donnée. Nous avons vu d'autre part (n° 888) que, pour trouver les congruences à lignes asymptotiques correspondantes sur les deux nappes focales, il faut résoudre, pour une surface, le problème de la déformation infiniment petite. La transformation de M. Lie nous permet d'établir un parallélisme, un lien étroit et direct, entre tous ces résultats.

981. Puisque cette transformation fait correspondre aux sphères de l'espace (M) des droites de l'espace ($m$), toute transformation de l'espace (M) qui conservera les sphères donnera, dans l'espace ($m$), une transformation conservant les lignes droites. Considérons, en particulier, dans l'espace (M), une inversion accompagnée de déplacement, il lui correspondra dans l'espace ($m$) une transformation homographique conservant le complexe H; car les droites de ce complexe, qui correspondent à des points de l'espace (M), doivent nécessairement rester correspondantes à des points et, par conséquent, ne cesseront pas d'appartenir au complexe H. Or, nous avons établi (Chap. IV de ce Livre) que, lorsqu'on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une certaine surface, on sait le résoudre aussi pour les surfaces homographiques. Transportant ce résultat à l'espace (M), nous voyons que :

*Si l'on sait résoudre le problème de la représentation sphé-*

*rique pour une surface* $(\Sigma)$, *on sait le résoudre aussi pour toutes les surfaces qui dérivent de* $(\Sigma)$ *par une inversion.*

Cette proposition, qui a de nombreuses applications, s'établit d'ailleurs directement de la manière la plus simple. Il suffit de remarquer que, pour une surface $(\Sigma)$, le problème de la représentation sphérique équivaut à la détermination des systèmes cycliques dont les cercles sont normaux à $(\Sigma)$. Énoncé sous cette dernière forme, il devient évident que le problème, résolu pour une surface donnée, l'est par cela même pour toutes les surfaces inverses à l'aide d'une simple quadrature (n° 950).

**982.** Puisque la solution du problème de la représentation sphérique pour une surface $(\Sigma)$ se ramène à l'intégration d'une équation linéaire à invariants égaux, il semble que toute recherche soit terminée; car nous connaissons toutes les équations de ce genre dont l'intégration peut être effectuée. Mais si l'on veut distinguer, comme cela est nécessaire pour les applications, entre les surfaces réelles et celles qui sont imaginaires, il se présente une difficulté que nous allons examiner, d'une manière complète, en terminant ce Chapitre.

Reprenons la méthode développée au n° 974. L'équation qu'il faudra intégrer sera la suivante

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} = \frac{\theta}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \rho\, \partial \rho_1}, \tag{30}$$

où $\lambda$ est défini par l'une ou l'autre des formules (4). Or, pour un point réel d'une surface réelle, $\alpha$ et $\beta$ sont des variables imaginaires conjuguées. Et, par suite, $\lambda$ *sera une imaginaire de module égal à* 1. Nous sommes donc conduits au problème d'Analyse suivant :

*Parmi les équations de la forme*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho\, \partial \rho_1} = k\theta, \tag{31}$$

*déterminer celles qui admettent une solution de module* 1 *et qui peuvent, en outre, être intégrées.*

Considérons, par exemple, l'équation la plus simple de la forme

précédente

$$(32) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \, \partial \rho_1} = 0.$$

Si l'on y substitue

$$\theta = e^{i\omega},$$

elle se décomposera dans les deux suivantes

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \, \partial \rho_1} = 0, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho_1} = 0,$$

qui donnent l'une ou l'autre des trois solutions suivantes

$$e^{ia}, \quad e^{if(\rho)}, \quad e^{if_1(\rho_1)},$$

$a$ désignant une constante, $f$ et $f_1$ des fonctions réelles. Le résultat est très simple; mais, pour les autres équations intégrables de la forme (31), il ne paraît pas se présenter aussi rapidement.

983. Avant de continuer, voyons quelles sont les surfaces qui correspondent aux valeurs précédentes de $\lambda$. Soit d'abord

$$(33) \qquad \lambda = e^{ia}.$$

Les équations (4), qui définissent la représentation sphérique, deviennent ici

$$\frac{\partial \beta}{\partial \rho} = e^{2ia} \frac{\partial \alpha}{\partial \rho},$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial \rho_1} = - e^{2ia} \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_1}.$$

En faisant tourner autour de l'axe des $z$, on pourra réduire à zéro la constante $a$; ce qui donnera

$$\frac{\partial(\beta - \alpha)}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial(\beta + \alpha)}{\partial \rho_1} = 0.$$

On a donc

$$\beta + \alpha = \varphi(\rho), \qquad \beta - \alpha = \psi(\rho_1).$$

Si $x, y, z$ désignent les coordonnées du point de la représentation sphérique, on a

$$(34) \qquad \frac{x + iy}{1 - z} = \alpha, \qquad \frac{x - iy}{1 - z} = \beta;$$

de sorte que les équations précédentes deviennent

$$(35) \qquad \frac{2x}{1-z} = \varphi(\rho), \qquad \frac{2y}{1-z} = i\psi(\rho_1).$$

La représentation sphérique se compose de deux familles de cercles orthogonaux. Tous les cercles d'une même famille se touchent mutuellement au point

$$x = y = 0, \qquad z = 1.$$

On a ici

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial\rho\, \partial\rho_1} = 0,$$

et l'on retrouve les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, considérées au n° 104 et définies par les équations (12) [I, p. 131].

Si l'on prend maintenant l'une des autres solutions

$$e^{if(\rho)}, \quad e^{if_1(\rho_1)},$$

on pourra toujours, en échangeant, s'il est nécessaire, $\rho$ et $\rho_1$ et choisissant convenablement le paramètre $\rho$, la réduire à

$$\lambda = e^{i\rho}.$$

La seconde équation (4) nous donne alors par l'intégration

$$\beta + e^{2i\rho}\alpha = f(\rho)$$

ou

$$\alpha e^{i\rho} + \beta e^{-i\rho} = 2\varphi(\rho).$$

Remplaçant $\alpha$ et $\beta$ par leurs valeurs (34), nous trouvons

$$(36) \qquad x\cos\rho - y\sin\rho = \varphi(\rho)(1-z).$$

Les courbes de paramètres $\rho$ sont donc des cercles qui passent par le point fixe

$$x = y = 0, \qquad z = 1.$$

On obtient sur la sphère le système orthogonal qui est l'inverse d'un système plan formé par des courbes parallèles et par leurs normales communes. Les surfaces qui l'admettent pour représentation sphérique ont évidemment leurs lignes de courbure planes dans un système; mais elles ne sont pas les plus générales de cette définition.

984. Après avoir examiné, parmi les équations de la forme (31), la plus simple de celles que l'on sait intégrer, il nous reste à résoudre le problème proposé pour toutes les autres. Nous allons indiquer comment on peut y parvenir. Voici d'abord la traduction géométrique des opérations analytiques que nous aurons à exécuter.

Soit une surface $(\Sigma)$ pour laquelle on sait résoudre le problème de la représentation sphérique et désignons par $(\Sigma')$ la surface la plus générale, dépendante de deux fonctions arbitraires, admettant même représentation sphérique que $(\Sigma)$. Le problème de la représentation sphérique est le même pour $(\Sigma')$ et pour $(\Sigma)$. Donc on saura le résoudre pour $(\Sigma')$ et, par suite aussi, d'après une proposition indiquée plus haut, pour la surface $(\Sigma'')$ qui est l'inverse de $(\Sigma')$. Répétant sur cette nouvelle surface $(\Sigma'')$ les mêmes opérations que sur $(\Sigma)$, on pourra introduire deux nouvelles fonctions arbitraires et poursuivre indéfiniment l'application de la méthode. Toutes les opérations indiquées pourront être effectuées dans l'espace réel et donneront alors des surfaces réelles si la première est réelle. Il reste seulement à établir que cette suite d'opérations, appliquée, par exemple, aux surfaces qui correspondent à l'équation (32), nous fournira toutes les solutions réelles du problème de la représentation sphérique. En tenant compte des formules qui définissent l'inversion dans le système de coordonnées tangentielles $(\alpha, \beta, \xi)$ [1], le lecteur reconnaîtra aisément que les considérations analytiques développées dans les numéros suivants se rattachent directement aux constructions géométriques que nous venons d'indiquer.

985. Soit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = kz \tag{37}$$

une équation linéaire du second ordre donnée; nous supposerons que les variables indépendantes $x$ et $y$ soient réelles et que l'é-

---

[1] Ces formules se déduisent très simplement de celles qui ont été données au n° 174 et se rapportent à un système de coordonnées légèrement différent.

quation admette une solution particulière

$$\omega = e^{i\theta}, \tag{38}$$

de module égal à l'unité. Nous allons montrer d'abord comment on peut déduire de cette équation un nombre illimité d'équations de même forme, admettant comme elle une solution imaginaire de module égal à l'unité.

Au n° 390, où nous avons établi le théorème de M. Moutard, nous avons vu que, si $z$ désigne une solution de l'équation (37) la fonction $\sigma$, définie par la quadrature

$$\omega\sigma = \int\left(\omega\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)dx - \left(\omega\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)dy, \tag{39}$$

satisfait à l'équation

$$\mathfrak{F}(\sigma) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\omega}\right), \tag{40}$$

où $\mathfrak{F}$ désigne le symbole défini au même n° 390. Comme l'équation proposée (37) peut s'écrire

$$\mathfrak{F}(z) = \mathfrak{F}(\omega), \tag{41}$$

on voit que les deux équations (37) et (40) se déduisent l'une de l'autre par le changement de $i$ en $-i$; par suite, elles admettront la première la solution $\sigma_0$, la seconde la solution $z_0$, $z_0$ et $\sigma_0$ désignant les imaginaires conjuguées de $z$ et de $\sigma$. Mais nous allons établir un résultat plus précis et montrer que l'on peut, d'une infinité de manières, choisir la solution $z$ de telle manière que $\sigma$ soit égale à $z_0$.

En effet, la quadrature qui définit $\sigma$ peut être remplacée par les deux relations suivantes

$$\frac{\partial(\omega\sigma)}{\partial x} = \omega^2\frac{\partial\left(\frac{z}{\omega}\right)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial(\omega\sigma)}{\partial y} = -\omega^2\frac{\partial\left(\frac{z}{\omega}\right)}{\partial y}, \tag{42}$$

qui nous donnent

$$\frac{\partial\left(\frac{\sigma_0}{\omega}\right)}{\partial x} = \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial(\omega z_0)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{\sigma_0}{\omega}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial(\omega z_0)}{\partial y}, \tag{43}$$

par le changement de $i$ en $-i$, entraînant celui de $\omega$ en $\frac{1}{\omega}$. Nous aurons donc

$$(44) \qquad \omega z_0 = \int \left(\omega \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} - \sigma_0 \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) dx - \left(\omega \frac{\partial \sigma_0}{\partial y} - \sigma_0 \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) dy,$$

de sorte que la formule (39), qui subsistait quand on y remplaçait $z$, $\sigma$, $\omega$ par $\sigma$, $z$, $\frac{1}{\omega}$, demeurera encore valable lorsque, sans changer $\omega$, on y remplacera $z$, $\sigma$ respectivement par $\sigma_0$, $z_0$. En ajoutant et en retranchant successivement les deux équations (39) et (44) on peut donc conclure que, si l'on emploie au lieu de $z$ l'une ou l'autre des deux solutions suivantes

$$(45) \qquad z + \sigma_0, \quad i(z - \sigma_0)$$

de l'équation (37), la quadrature (39) nous fournira au lieu de $\sigma$ les deux solutions correspondantes

$$(46) \qquad \sigma + z_0, \quad i(\sigma - z_0)$$

de l'équation (40), solutions qui sont, dans les deux cas, imaginaires conjuguées de celles d'où on les a déduites. Comme on ne peut pas avoir en même temps

$$z + \sigma_0 = 0, \qquad z - \sigma_0 = 0,$$

on voit que, dans l'un au moins des deux systèmes de solutions ainsi obtenus, les valeurs de $z$ et de $\sigma$ ne seront pas nulles, ce qui démontre la proposition énoncée.

986. Cela posé, employons non plus la solution $\omega$, mais la solution $z$, pour passer, suivant la méthode de M. Moutard, de l'équation proposée (37) à une autre équation

$$(47) \qquad \mathfrak{F}(Z) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{z}\right),$$

que l'on saura intégrer en même temps que la première. D'après les relations (42), on verra facilement que l'on a

$$(48) \qquad \mathfrak{F}\left(\frac{\omega\sigma}{z}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{z}\right),$$

et par conséquent l'équation précédente (47) admettra la solution

particulière

$$Z = \omega \frac{\sigma}{z}, \tag{49}$$

qui, elle aussi, est de module égal à l'unité toutes les fois que $\sigma$ est l'imaginaire conjuguée de $z$.

987. Ainsi, il y a une infinité de solutions de l'équation (37) dont l'emploi permet de passer à de nouvelles équations conservant la propriété d'admettre des solutions imaginaires de module égal à l'unité. Il nous reste à démontrer que la méthode précédente pourra fournir effectivement et complètement l'ensemble des équations qui admettent de telles solutions. Pour établir ce résultat, nous remarquerons tout d'abord que, appliquée à une équation pour laquelle la suite de Laplace est limitée, la méthode employée donnera généralement des équations pour lesquelles le rang de la solution (nº 335) s'élèvera de plus en plus.

Prenons, en effet, comme solution de passage la combinaison suivante

$$z' = z + \sigma_0 + ai(z - \sigma_0) \tag{50}$$

des deux solutions (45), $a$ désignant une constante. Pour

$$ai = 1,$$

on a

$$z' = 2z,$$

et comme $z$ est la solution la plus générale de l'équation (37) l'emploi de la solution $2z$ permettra certainement de passer à une équation de rang supérieur. Puisque le rang s'élève par l'emploi de la solution de passage $z'$, pour la valeur particulière $-i$ de $a$, il ne pourra rester le même, ou s'abaisser, que pour certaines valeurs particulières de $a$; et, par suite, la solution définie par l'équation (50) fournira, *pour une infinité de valeurs réelles de $a$*, une équation nouvelle

$$\mathfrak{F}(Z) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{z'}\right),$$

ayant une solution générale de rang supérieur. Si l'on pose

$$\sigma' = z_0 + \sigma - ai(z_0 - \sigma), \tag{51}$$

cette équation admettra évidemment la solution imaginaire $\frac{\omega\varpi'}{z'}$ de module égal à l'unité.

Si nous pouvons établir maintenant que l'on peut toujours, en choisissant convenablement $z$, non plus élever, mais abaisser le rang de la solution, nous aurons montré par cela même que toutes les équations cherchées dérivent, par voie de récurrence, de celle que nous avons étudiée au n° 982. Mais, pour mettre hors de doute ce point essentiel, nous avons à rappeler et à compléter diverses notions données au Livre IV et plus particulièrement au Chap. VII de ce Livre.

988. Nous commencerons par la remarque suivante :

Soit (E) une équation linéaire du second ordre pour laquelle la suite de Laplace se termine dans les deux sens, du côté positif à l'équation ($E_i$), du côté négatif à l'équation ($E_{-j}$). Nous avons vu que son intégrale générale peut se mettre sous la forme suivante

$$(52)\qquad z = N\begin{vmatrix} X & X' & \ldots & X^{(i)} & Y & Y' & \ldots & Y^{(j)} \\ x_1 & x'_1 & \ldots & x_1^{(i)} & y_1 & y'_1 & \ldots & y_1^{(j)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_m & x'_m & \ldots & x_m^{(i)} & y_m & y'_m & \ldots & y_m^{(j)} \end{vmatrix},$$

où l'on a $m = i + j + 1$, où X, Y désignent des fonctions arbitraires, dépendant respectivement de $x$ et de $y$ seulement. N est une fonction déterminée quelconque, les $x_h$ dépendent de $x$ et les $y_k$ de $y$ seulement; de plus les $x_h$ sont des fonctions linéairement indépendantes ainsi que les $y_k$. Aux n$^{os}$ 341, 342, nous avons indiqué quelques propriétés des expressions de la forme générale (52) qui s'annulent quand on remplace le couple (X, Y) par le couple $(x_h, y_h)$. Nous ajouterons ici la remarque suivante. Supposons que l'on ait trouvé pour la même équation (E) deux formes distinctes de l'intégrale, la première

$$(53)\qquad z = MX + M_1X' + \ldots + M_iX^{(i)} + NY + N_1Y' + \ldots + N_jY^{(j)},$$

la seconde

$$(54)\qquad z = PX_0 + P_1X'_0 + \ldots + P_iX_0^{(i)} + QY_0 + Q_1Y'_0 + \ldots + Q_jY_0^{(j)};$$

on passera de l'une à l'autre par une substitution de la forme

$$(55)\quad \begin{cases} X = AX_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m, \\ Y = BY_0 + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_m y_m, \end{cases}$$

où A est une fonction de $x$, B une fonction de $y$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ des constantes quelconques.

Pour le démontrer nous remarquerons que, si l'on passe de l'équation (E) à celle ($E_i$), qui termine la suite de Laplace du côté positif, la première forme de l'intégrale donnera pour l'équation ($E_i$) une intégrale

$$z_i = HX + KY + K_1 Y' + \ldots + K_{m-1} Y^{(m-1)}$$

et la seconde forme de l'intégrale donnera de même

$$z_i = LX_0 + RY + R_1 Y' + \ldots + R_{m-1} Y^{(m-1)}.$$

Égalant ces expressions différentes de $z_i$ et remplaçant $y$ par une valeur constante quelconque, on aura

$$X = AX_0 + A_1,$$

A et $A_1$ dépendant de $x$ seulement.

En considérant de même l'équation ($E_{-j}$), on démontrera que l'on a

$$Y = BY_0 + B_1,$$

B et $B_1$ étant des fonctions de $y$.

Si donc, pour abréger, on pose conformément à une notation déjà employée (n[os] 368 et 394)

$$(56)\quad \begin{cases} z = f(X) + \varphi(Y), \\ z = f_0(X_0) + \varphi_0(Y_0), \end{cases}$$

on devra avoir, en substituant les valeurs de X, Y et égalant les deux expressions de $z$

$$f(AX_0) + \varphi(BY_0) + f(A_1) + \varphi(B_1) = f_0(X_0) + \varphi_0(Y_0),$$

et cela pour toutes les expressions possibles des fonctions arbitraires $X_0$, $Y_0$. Si l'on donne successivement des valeurs nulles à ces deux fonctions l'équation précédente se décomposera dans les

trois suivantes

$$(57)\qquad \begin{cases} f(A_1)+\varphi(B_1)=0, \\ f(AX_0)=f_0(X_0), \\ \varphi(BY_0)=\varphi_0(Y_0). \end{cases}$$

Les deux dernières détermineront les symboles $f_0$, $\varphi_0$. Quant à la première, d'après le résultat démontré au n° 342, elle montre que $A_1$, $B_1$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants

$$A_1=\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_m x_m,$$
$$B_1=\lambda_1 y_1+\ldots+\lambda_m y_m$$

des fonctions $x_h$, $y_h$. La proposition énoncée se trouve ainsi démontrée.

Si l'on effectue, dans l'expression (52) de $z$, la substitution définie par les formules (55), elle conservera sa forme générale, nous l'avons déjà démontré (n° 341); et il est clair que les nouveaux couples avec lesquels elle est formée $(x_h^0, y_h^0)$ se déduiront des anciens $(x_h, y_h)$ par la substitution

$$(58)\qquad x_h^0=\frac{x_h}{A},\qquad y_h^0=\frac{y_h}{B},$$

de telle sorte que, si l'on a, dans les deux formes de l'intégrale $x_h=x_h^0$, la fonction A se réduira nécessairement à une constante et l'on aura

$$(59)\qquad f_0(X_0)=Af(X_0).$$

Nous ferons plus loin usage de cette remarque.

989. Revenons maintenant aux équations à invariants égaux et rappelons la méthode donnée au Livre IV, Chapitre VII (n° 394). Nous avons vu que, si l'intégrale générale de l'équation (37) est donnée par la formule

$$(60)\qquad z=f_1(X)+f_2(Y),$$

où nous conservons toutes les notations adoptées au n° 394, et si l'on emploie la solution $\omega$ ayant pour expression

$$(61)\qquad \omega=f_1(X_1)+f_2(Y_1),$$

la fonction $\sigma$ définie par la quadrature (39) est déterminée par la formule

$$(62)\quad \begin{cases} \omega\sigma = \omega[f_1(X)-f_2(Y)] - 2B_1\left(X, \dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right) + 2B_2\left(Y, \dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right) \\ \qquad - 2\displaystyle\int X\,\varphi_1(X_1)\,dx + 2\int Y\,\varphi_2(Y_1)\,dy. \end{cases}$$

Aux propriétés que nous avons établies, nous allons ajouter quelques relations nouvelles. D'après la formule (39), $\omega\sigma$ doit se réduire à une constante lorsqu'on fait $\varpi = \omega$, c'est-à-dire

$$X_1 = X, \qquad Y_1 = Y.$$

Le second membre de l'équation (62) devra donc se réduire à zéro pour une détermination convenable des deux intégrales tant que ces intégrales ne disparaîtront pas toutes les deux. En égalant à zéro les parties qui subsistent lorsqu'on annule séparément Y ou X, on obtient les deux formules déjà connues (n° 396)

$$(63)\quad \begin{cases} 2\displaystyle\int X\,\varphi_1(X)\,dx = f_1^2(X) - 2B_1\left[X, \dfrac{\partial f_1(X)}{\partial x}\right], \\ 2\displaystyle\int Y\,\varphi_2(Y)\,dy = f_2^2(Y) - 2B_2\left[Y, \dfrac{\partial f_2(Y)}{\partial y}\right]. \end{cases}$$

Il reste alors la suivante qui est nouvelle

$$(64)\quad B_1\left[X, \frac{\partial f_2(Y)}{\partial x}\right] = B_2\left[Y, \frac{\partial f_1(X)}{\partial y}\right].$$

Si, dans la première des formules (63), on remplace X par $X + \lambda X_1$, $\lambda$ désignant une constante, on trouvera, en égalant les coefficients de $\lambda$ dans les deux membres, la relation suivante

$$(65)\quad \begin{cases} \displaystyle\int X\,\varphi_1(X_1)\,dx + \int X_1\,\varphi_1(X)\,dx \\ \quad = f_1(X)\,f_1(X_1) - B_1\left[X, \dfrac{\partial f_1(X_1)}{\partial x}\right] - B_1\left[X_1, \dfrac{\partial f_1(X)}{\partial x}\right]. \end{cases}$$

Remplaçons $X_1$ par $x_i$, en nous rappelant que l'on a (n° 396)

$$(66)\quad \varphi_1(x_i) = 0, \qquad f_1(x_i) + f_2(y_i) = 0.$$

Il viendra

$$(67)\quad \int x_i\,\varphi_1(X)\,dx = f_1(X)\,f_1(x_i) - B_1\left[X,\ \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x}\right] - B_1\left[x_i,\ \frac{\partial f_1(X)}{\partial x}\right].$$

En tenant compte des identités (64) et (66), on peut écrire

$$(68)\quad B_1\left[X,\ \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x}\right] = -B_1\left[X,\ \frac{\partial f_2(y_i)}{\partial x}\right] = -B_2\left[y_i,\ \frac{\partial f_1(X)}{\partial y}\right].$$

Nous prendrons, par suite,

$$(69)\quad \int x_i\,\varphi_1(X)\,dx = f_1(X)\,f_1(x_i) - B_1\left[x_i,\ \frac{\partial f_1(X)}{\partial x}\right] + B_2\left[y_i,\ \frac{\partial f_1(X)}{\partial y}\right],$$

et de même

$$(70)\quad \int y_i\,\varphi_2(Y)\,dy = f_2(Y)\,f_2(y_i) - B_2\left[y_i,\ \frac{\partial f_2(Y)}{\partial y}\right] + B_1\left[x_i,\ \frac{\partial f_2(Y)}{\partial x}\right],$$

de sorte que ces deux dernières formules, jointes aux deux précédentes (63), détermineront la valeur *précise* que nous attribuerons toujours aux intégrales

$$\int x_i\,\varphi_1(X)\,dx,\quad \int y_i\,\varphi_2(Y)\,dy,\quad \int X\,\varphi_1(X)\,dx,\quad \int Y\,\varphi_2(Y)\,dy,$$

lorsque nous les rencontrerons dans la suite du raisonnement.

990. Cela posé, restons encore dans les généralités et supposons que les fonctions $\varphi_1(X_1)$, $\varphi_2(Y_1)$ soient différentes de zéro. L'expression de $\sigma$ s'annulera quand on remplacera

$$\int X\,\varphi_1(X_1)\,dx = X_0 \quad \text{et} \quad \int Y\,\varphi_2(Y_1)\,dy = Y_0,$$

respectivement par le couple (1, 1) et par les suivants

$$\left[\int X_1\,\varphi_1(X_1)\,dx,\ \int Y_1\,\varphi_2(Y_1)\,dy\right],\quad \left[\int x_i\,\varphi_1(X_1)\,dx,\ \int y_i\,\varphi_2(Y_1)\,dy\right].$$

L'intégrale $\sigma$ sera de rang supérieur à $z$ et nous retrouvons le résultat déjà indiqué au n° 396, en indiquant seulement ici d'une manière plus précise comment il faut déterminer les quadratures précédentes.

Supposons maintenant que la solution $\omega$ soit telle que l'on ait,

par exemple

$$\varphi_1(X_1) = 0, \qquad \varphi_2(Y_1) \neq 0.$$

Alors il viendra pour $X_1$ une combinaison linéaire à coefficients constants

$$X_1 = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$$

de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et comme on peut, sans changer $\omega$, retrancher de $X_1$ cette combinaison linéaire, à la condition de retrancher $\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_m y_m$ de $Y_1$, on pourra supposer

$$X_1 = 0.$$

Alors, si l'on pose

$$\int Y\,\varphi_2(Y_1)\,dy = Y_0,$$

l'expression de $\sigma$ s'annulera quand on y remplacera le couple $(X, Y_0)$ des fonctions arbitraires par les suivants

$$\left[x_i, \int y_i\,\varphi_2(Y_1)\,dy\right], \qquad \left[0, \int Y_1\,\varphi_2(Y_1)\,dy\right].$$

Mais comme le premier élément du dernier couple est nul, l'analyse développée au n° 341 permettra, en substituant à $Y_0$ la fonction

$$\left(\frac{Y_0}{\int Y_1\,\varphi_2(Y_1)\,dy}\right)',$$

de réduire cette expression de $\sigma$ à une forme nouvelle admettant seulement les couples suivants

$$\left[x_i, \left(\frac{\int y_i\,\varphi_2(Y_1)\,dy}{\int Y_1\,\varphi_2(Y_1)\,dy}\right)'\right],$$

qui sont en même nombre que ceux de $z$ et, en outre, *composés du même premier élément*. Donc, si l'on détermine le rang d'une équation d'après celui de sa solution générale, l'équation à laquelle satisfait $\sigma$ est de même rang que la proposée (37).

**991.** Supposons enfin que la solution $\omega$ soit telle que l'on ait à

la fois

(71) $$\varphi_1(X_1) = 0, \qquad \varphi_2(Y_1) = 0;$$

on pourra encore supposer que l'on ait

(71) $$X_1 = 0.$$

Mais, de plus, $Y_1$ sera une solution de la seconde équation (71) que l'on pourra prendre pour représenter le second élément $y_1$ du premier couple. Faisons donc

(72) $$Y_1 = y_1.$$

L'expression de $\sigma$ sera débarrassée de tout signe de quadrature. Si l'on pose

(73) $$f_2(y_i)f_2(y_k) - B_2\left[y_i, \frac{\partial f_2(y_k)}{\partial y}\right] - B_2\left[y_k, \frac{\partial f_2(y_i)}{\partial y}\right] = a_{ik},$$

$a_{ik}$ sera une constante en vertu de la formule (70).

Pour $X = x_i$, $Y = y_i$, on trouve

$$\omega\sigma = -2a_{i1}.$$

Pour $X = 0$, $Y = y_1$, on a

$$\omega\sigma = -a_{11},$$

$\sigma$ s'annulera donc quand on y remplacera le couple (X, Y) par les suivants

$$\left(x_i, y_i - \frac{2a_{i1}}{a_{11}}y_1\right),$$

qui sont en même nombre que ceux de $z$ et, ici encore, composés du même premier élément.

Si $a_{11}$ était nul, le résultat précédent n'aurait aucun sens, mais nous avons vu (n° 396) que, dans ce cas, $\sigma$ est l'intégrale générale d'une équation de rang inférieur.

**992.** Nous venons de compléter notre théorie du Livre IV, Chap. VII, relative au passage d'une équation à une autre par l'emploi du théorème de M. Moutard. Appliquons les résultats obtenus au cas spécial où $\omega$ est une solution imaginaire de module égal à l'unité. Alors, comme $\sigma$ satisfait à l'équation imaginaire conjuguée de la proposée, il faudra que $\sigma$ *soit de même rang que z*,

et, par suite, que $\omega$ satisfasse au moins à l'une des conditions

$$\varphi_1(X_1) = 0, \qquad \varphi_2(Y_1) = 0.$$

Supposons donc

$$X_1 = 0.$$

Si l'on a de plus

$$\varphi_2(Y_1) = 0,$$

on peut affirmer que la constante $a_{11}$ ne sera pas nulle, sans quoi $\sigma$ serait de rang inférieur à $z$, ce qui est impossible. Donc, dans tous les cas, *les couples de $\sigma$ auront les mêmes premiers éléments $x_h$ que les couples de $z$.*

Dans la solution ainsi trouvée pour $\sigma$ changeons $i$ en $-i$; nous trouverons évidemment la solution générale de l'équation en $z$; et, d'autre part, les premiers éléments $x_h$ de chaque couple seront remplacés par leurs conjugués $x_h^0$. Donc la solution générale de l'équation en $z$ peut être mise sous une forme dans laquelle les premiers éléments des différents couples sont les $x_h^0$.

Considérons les deux équations différentielles auxquelles satisfont, d'une part, les fonctions $x_h$ et, d'autre part, les fonctions $x_h^0$. Il suit de la remarque que nous venons de faire et de la théorie développée plus haut (n° 988) que l'on obtiendra les différentes solutions de la seconde en multipliant celles de la première par une certaine fonction $\varphi(x)$. Donc, si $x_h$ est une solution de la première, $x_h\,\varphi(x)$ sera une solution de la seconde. D'autre part, les solutions particulières des deux équations étant deux à deux imaginaires conjuguées, la conjuguée $x_h^0\,\varphi_0(x)$ de $x_h\,\varphi(x)$ [$\varphi_0(x)$ étant la fonction conjuguée de $\varphi(x)$] sera une nouvelle solution de la première et enfin $x_h^0\,\varphi_0(x)\,\varphi(x)$ sera une nouvelle solution de la seconde. On peut conclure de là que, étant donnée une solution quelconque de l'une des deux équations linéaires, on en trouvera une nouvelle en la multipliant par la fonction, réelle et positive,

$$\theta(x) = \varphi(x)\,\varphi_0(x).$$

Cela exige évidemment que $\theta(x)$ soit une constante. Il sera permis de la prendre égale à l'unité, et l'on aura, par conséquent,

$$\varphi(x) = e^{2if(x)},$$

$f(x)$ étant une fonction réelle de $x$.

La première équation linéaire admet donc, en même temps que la solution $x_h$, la suivante

$$x_h^0 \varphi_0(x) = x_h^0 e^{-2if(x)}.$$

Or si, dans l'expression générale de $z$, on remplace la fonction arbitraire X de $x$ par $\mathrm{X}e^{-if(x)}$, toutes les solutions $x_h$ de la première équation linéaire seront multipliées par $e^{if(x)}$; de sorte que cette première équation admettra maintenant, en même temps, les deux solutions

$$x_h e^{if(x)}, \quad x_h^0 e^{-if(x)},$$

*qui sont imaginaires conjuguées l'une de l'autre*. On peut évidemment remplacer ces deux solutions imaginaires par les deux solutions réelles formées de la partie réelle et de la partie imaginaire de l'une d'elles. Et l'on voit ainsi que l'on peut ramener la solution générale $z$ de l'équation aux dérivées partielles à une forme pour laquelle les premiers éléments $x_h$ de chaque couple *sont tous réels*.

993. Ce résultat essentiel étant établi, adoptons pour $z$ la forme dont nous venons de démontrer l'existence et bornons-nous à considérer les solutions $z'$ pour lesquelles on a

$$\mathrm{Y} = 0, \qquad z' = f_1(\mathrm{X}), \tag{74}$$

X étant une fonction arbitraire *réelle*. Alors, comme on a

$$\mathrm{X}_1 = 0,$$

pour la solution $\omega$, la formule (62) est débarrassée de tout signe de quadrature et nous donne pour $\sigma$ une expression de la forme

$$\sigma' = \varphi_1(\mathrm{X}),$$

qui renferme, jusqu'au même ordre que dans $z'$, les dérivées de la fonction arbitraire X. Si l'on y change $i$ en $-i$, on aura

$$\sigma'_0 = \varphi_1^0(\mathrm{X}),$$

et, d'après la proposition établie plus haut, à la fin du n° 988, on pourra écrire

$$\varphi_1^0(\mathrm{X}) = a\, f_1(\mathrm{X}),$$

$a$ étant une constante. De là, on déduit

$$\sigma' = \varphi_1(X) = a_0 f_1^0(X) = a_0 z'_0,$$

$a_0$ étant la constante conjuguée de $a$.

Cela posé, l'équation

$$\mathfrak{F}(Z) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{z'}\right)$$

admettra, d'après ce que nous avons vu, la solution $\frac{\omega\sigma'}{z'}$ ou, en supprimant le facteur constant $a_0$, la solution $\frac{\omega z'_0}{z'}$ qui est encore de module égal à 1, comme $\omega$.

D'autre part, en prenant pour X, dans la formule (74), une solution particulière *réelle* de l'équation linéaire

$$\varphi_1(X) = 0,$$

qui annule l'intégrale quadratique de cette équation linéaire, ce qui est toujours possible (nos 374 et 396), puisque toutes les solutions particulières $x_h$ de cette équation sont réelles et linéairement indépendantes, on sera assuré de passer, par l'intermédiaire de $z'$, à une équation aux dérivées partielles de rang inférieur à la proposée. Ainsi se trouve complétée notre démonstration : toutes les équations admettant des solutions de module égal à l'unité peuvent se déduire par récurrence de celle que nous avons considérée au n° 982.

**994.** Il ne sera pas inutile d'indiquer au moins une application de la méthode de récurrence que nous venons d'étudier.

Prenons, comme point de départ, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0, \tag{75}$$

et la solution, de module égal à 1,

$$\omega' = e^{ix}, \tag{76}$$

de cette équation. Soit $z'$ une autre solution quelconque et $\sigma'$ la fonction définie par la quadrature

$$\omega'\sigma' = \int \left(\omega' \frac{\partial z'}{\partial x} - z' \frac{\partial \omega'}{\partial x}\right) dx - \left(\omega' \frac{\partial z'}{\partial y} - z' \frac{\partial \omega'}{\partial y}\right) dy. \tag{77}$$

Dans le cas spécial que nous considérons, $\sigma'$ satisfera encore à l'équation (75). Il faut tout d'abord mettre $z'$ sous une forme telle que $\sigma'$ soit sa conjuguée. Pour cela, il n'y a qu'à appliquer la méthode générale donnée plus haut (n° 985) et l'on reconnaît ainsi qu'il faut prendre $z'$ sous la forme

$$z' = X' + iX + iY, \tag{78}$$

où X, Y désignent des fonctions réelles de $x$ et de $y$ respectivement. On peut prendre alors

$$\sigma' = X' - iX - iY, \tag{79}$$

et l'on peut passer à une équation de rang supérieur.

L'emploi de la solution $z'$ conduit à l'équation de second rang

$$\mathfrak{F}(z) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{z'}\right) = 2i\frac{(X'' + iX')Y'}{(X' + iX + iY)^2}, \tag{80}$$

qui admet la solution particulière de module égal à l'unité

$$\omega = \omega'\frac{\sigma'}{z'} = e^{ix}\frac{X' - iX - iY}{X' + iX + iY}, \tag{81}$$

et dont l'intégrale générale sera définie (n° 395) par la formule

$$z = \frac{2X_0 + 2Y_0}{X' + iX + iY} - \frac{X'_0}{X'' + iX'} + i\frac{Y'_0}{Y'}, \tag{82}$$

où $X_0$, $Y_0$ désignent deux nouvelles fonctions arbitraires de $x$ et de $y$. La solution $\omega$ correspond aux déterminations suivantes de ces fonctions

$$X_0 = X'e^{ix}, \qquad Y_0 = 0. \tag{83}$$

Pour pouvoir continuer, il faut mettre ces fonctions $X_0$, $Y_0$ sous une forme telle que la fonction $\sigma$, définie par la quadrature

$$\omega\sigma = \int\left(\omega\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)dx - \left(\omega\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)dy, \tag{84}$$

soit la conjuguée de $z$. Pour cela, il faut calculer d'abord $\sigma$. En vue des applications ultérieures, nous indiquerons même comment on calculerait la fonction $\theta$ définie par la quadrature

$$z'\theta = \int\left(z'\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial z'}{\partial x}\right)dx - \left(z'\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial z'}{\partial y}\right)dy, \tag{85}$$

$z'$ étant, comme $z$, une solution de l'équation (80) correspondante aux déterminations $X_1$, $Y_1$ de $X_0$ et de $Y_0$,

$$z' = \frac{2X_1 + 2Y_1}{X' + iX + iY} - \frac{X'_1}{X'' + iX'} + i\frac{Y'_1}{Y'}. \tag{86}$$

Il n'y a ici qu'à appliquer sans modification la méthode indiquée au n° 394. Posons

$$\left\{\begin{aligned}
f_1(u) &= \frac{2u}{X' + iX + iY} - \frac{u'}{X'' + iX'},\\
f_2(u) &= \frac{2u}{X' + iX + iY} + i\frac{u'}{Y'},\\
g_1(v) &= \left[\frac{2}{X' + iX + iY} - \frac{X''' + iX''}{(X'' + iX')^2}\right]v + \frac{v'}{X'' + iX'},\\
g_2(v) &= \left[\frac{2}{X' + iX + iY} + i\frac{Y''}{Y'^2}\right]v - \frac{iv'}{Y'},\\
B_1(u, v) &= -\frac{uv}{X'' + iX'},\\
B_2(u, v) &= i\frac{uv}{Y'},
\end{aligned}\right. \tag{87}$$

on aura

$$z = f_1(X_0) + f_2(Y_0), \qquad z' = f_1(X_1) + f_2(Y_1), \tag{88}$$

$$g_1\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = -\left[\frac{1}{X'' + iX'}\left(\frac{X'_1}{X'' + iX'}\right)'\right]', \quad g_2\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = \left[\frac{1}{Y'}\left(\frac{Y'_1}{Y'}\right)'\right]', \tag{89}$$

et l'on trouvera

$$\left\{\begin{aligned}
\theta = {} & f_1(X_0) - f_2(Y_0) + \frac{2X_0}{X'' + iX'}\frac{\partial \log z'}{\partial x} + \frac{2iY_0}{Y'}\frac{\partial \log z'}{\partial y}\\
& - \frac{2}{z'}\int X_0 g_1\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)dx + \frac{2}{z'}\int Y_0 g_2\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)dy;
\end{aligned}\right. \tag{90}$$

$\theta$ sera la solution générale de l'équation

$$\mathfrak{F}(\theta) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{z'}\right), \tag{91}$$

et l'on y fera disparaître les quadratures par les changements de notation si souvent indiqués.

Supposons que $z'$ se réduise à $\omega$ et, pour cela, remplaçons $X_1$, $Y_1$, par les déterminations (83) données plus haut. Nous aurons

alors

$$(92)\quad g_1\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = ie^{ix}\frac{X''' + X'}{(X'' + iX')^2} = -i\left(\frac{e^{ix}}{X'' + iX'}\right)', \qquad g_2\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) = 0;$$

$\theta$ sera alors égal à $\sigma$, ce qui donnera

$$(93)\quad \begin{cases} \sigma = f_1(X_0) - f_2(Y_0) + \dfrac{2X_0}{X'' + iX'}\dfrac{\partial \log\omega}{\partial x} \\ \quad + \dfrac{2iY_0}{Y'}\dfrac{\partial\log\omega}{\partial y} + \dfrac{2i}{\omega}\displaystyle\int X_0\left(\frac{e^{ix}}{X'' + iX'}\right)' dx. \end{cases}$$

Il faut maintenant choisir $X_0$, $Y_0$ de telle manière que $\sigma$ soit la conjuguée de $z$; c'est le résultat que l'on obtiendra en prenant pour $Y_0$ *une fonction réelle de* $y$, et en substituant à la place de $X_0$ l'expression

$$(94)\quad X_0 = X_2 - \frac{X'' + iX'}{X''' + X'}X_2',$$

où $X_2$ est une fonction arbitraire *réelle* de $x$.

Alors l'emploi de la solution $z$ permettra de passer à l'équation de troisième rang

$$(95)\quad \mathfrak{F}(Z) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{z}\right),$$

qui admettra encore une solution $\frac{\omega\sigma}{z}$ de module égal à l'unité.

Il est essentiel de remarquer que, conformément à la proposition du n° **394**, on peut faire disparaître, par un choix convenable des fonctions arbitraires, tout signe de quadrature dans la suite des calculs.

Pour obtenir toutes les équations de second et de troisième rang, admettant des solutions de module égal à l'unité, il faudrait encore employer les solutions

$$e^{i\alpha}, \quad e^{i\gamma}$$

de l'équation (75). Mais ces solutions se déduisent de celle que nous avons choisie, soit par un changement de notation, soit par le passage à la limite.

# CHAPITRE IX.

## SURFACES À LIGNES DE COURBURE PLANES.

Première application des méthodes précédentes. — Rappel des formules propres à déterminer les surfaces admettant une représentation sphérique donnée. — Recherche des surfaces à lignes de courbure planes dans un système. — Elles correspondent toutes à des équations à invariants égaux pour lesquelles la solution est de premier ou de second rang. — Méthode de recherche directe : théorème général qui permet de les déterminer très simplement au moyen de trois développables dont l'une ($\Delta$) est isotrope et les deux autres (D), ($D_1$) applicables l'une sur l'autre avec correspondance des génératrices rectilignes. — On déduit de cette proposition que, si une ligne de courbure plane est un cercle, toutes les autres sont des cercles, que si une d'elles est algébrique, toutes les autres le sont aussi, etc. — Mise en œuvre de la génération précédente. — Calculs et constructions géométriques propres à déterminer la surface réelle la plus générale à lignes de courbure planes, sans aucun signe de quadrature.

---

995. Avant de passer aux applications des résultats analytiques obtenus au Chapitre précédent, rappelons en quelques mots les résultats obtenus. Pour ne pas multiplier les changements de notation, supposons que $x$, $y$ soient les paramètres des lignes de courbure et jouent le rôle des variables $\rho$, $\rho_1$ du n° 974. Les surfaces qu'on peut rattacher à une même équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \, \partial y} = k\theta, \tag{1}$$

pour laquelle on a résolu les problèmes analytiques précédents, pourront être définies de la manière suivante. Si l'on désigne par $z$, $z'$ deux solutions quelconques de l'équation, mises sous la forme pour laquelle les fonctions imaginaires conjuguées $\sigma$, $\sigma'$ sont définies par les quadratures

$$\left\{\begin{aligned} \omega\sigma &= \int\left(\omega\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)dx - \left(\omega\frac{\partial z}{\partial y} - z\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)dy, \\ \omega\sigma' &= \int\left(\omega\frac{\partial z'}{\partial x} - z'\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)dx - \left(\omega\frac{\partial z'}{\partial y} - z'\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)dy, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$\omega$ étant toujours la solution de module égal à l'unité, on pourra prendre, en rapportant la surface au système de coordonnées tangentielles $\alpha$, $\beta$, $\xi$,

$$\alpha = \frac{z'}{\omega}, \qquad \beta = \omega\sigma'. \tag{3}$$

Ces deux formules définiront la représentation sphérique des lignes de courbure. Puis on fera de même

$$p' = \omega\sigma, \qquad q' = \frac{z}{\omega}, \tag{4}$$

$$\xi = \int (p'\, d\alpha + q'\, d\beta) = z\sigma' + \int \left( z' \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial z'}{\partial x} \right) dx - \left( z' \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial z'}{\partial y} \right) dy. \tag{5}$$

Les variables $\alpha$ et $\beta$ étant imaginaires conjuguées ainsi que $p'$ et $q'$, on pourra obtenir une infinité de déterminations réelles de $\xi$ et la surface sera l'enveloppe du plan défini par l'équation

$$(\alpha + \beta)X + i(\beta - \alpha)Y + (\alpha\beta - 1)Z + \xi = 0, \tag{6}$$

où tout est connu et d'où l'on peut faire disparaître tout signe de quadrature. Rappelons les relations

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial x} &= \omega^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x}, & \frac{\partial p'}{\partial x} &= \omega^2 \frac{\partial q'}{\partial x}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} &= -\omega^2 \frac{\partial \alpha}{\partial y}, & \frac{\partial p'}{\partial y} &= -\omega^2 \frac{\partial q'}{\partial y}, \end{aligned} \right. \tag{7}$$

tout à fait équivalentes aux formules (2).

**996.** Nous avons déjà reconnu (n° 983) que l'équation la plus simple de la forme (1) correspond à des surfaces à lignes de courbure planes particulières, caractérisées par cette propriété que les cercles qui servent de représentation sphérique aux lignes de courbure planes passent tous par un point fixe. Proposons-nous maintenant de définir les surfaces à lignes de courbure planes les plus [illegible] Nous allons voir qu'elles correspondent toutes à des équations pour lesquelles la solution est de *premier* ou de *second* rang.

Désignons par $x$ le paramètre des lignes de courbure planes de la surface. En tous les points d'une de ces lignes, le plan tangent devra faire un angle constant avec le plan de la ligne, c'est-à-dire

avec une droite dont les paramètres directeurs dépendront uniquement de $x$. En exprimant cette condition, on sera conduit à une équation de la forme

$$x_0(\alpha+\beta)+ix_1(\beta-\alpha)+x_2(\alpha\beta-1)=x_3(\alpha\beta+1),$$

$x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ désignant des fonctions de $x$. Au reste, cette équation exprime que la représentation sphérique de la ligne de courbure est un cercle. En changeant les notations et remarquant que $x_3-x_2$ ne saurait être nulle quand les axes sont quelconques, on lui donnera la forme plus simple

$$(8) \qquad (\alpha-x_0)(\beta-x_1)=x_2^2,$$

$x_0$, $x_1$, $x_2$ étant toujours des fonctions de $x$; quand la surface sera réelle, les deux premières seront conjuguées et la troisième réelle.

Différentions cette équation par rapport à $y$. En tenant compte de la seconde formule (7) et remarquant que $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$ ne peut être nulle, nous aurons

$$(\alpha-x_0)\omega^2=\beta-x_1,$$

et de là, on déduit, $x_2$ n'étant jusqu'ici définie que par son carré,

$$(9) \qquad \begin{cases} (\alpha-x_0)\omega=x_2, \\ \beta-x_1=x_2\,\omega. \end{cases}$$

La première de ces équations peut s'écrire

$$(10) \qquad z'=x_0\,\omega+x_2;$$

nous sommes ainsi conduit à exprimer que l'équation (1) admet deux solutions $z'$, $\omega$ reliées par la relation précédente.

A cet effet, substituons dans cette équation (1) la valeur précédente de $z'$. En tenant compte de ce que $\omega$ est déjà solution de l'équation, ce qui donne

$$(11) \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}=k\,\omega,$$

il vient

$$(12) \qquad x'_0\,\frac{\partial\omega}{\partial y}=kx_2.$$

Portons la valeur de $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ dans le premier membre de la relation précédente, il viendra

$$k\omega = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kx_2}{x'_0}\right),$$

ou, en excluant l'hypothèse $k=0$, déjà examinée (n° 983),

$$\omega = \frac{x_2}{x'_0}\frac{\partial \log k}{\partial x} + \left(\frac{x_2}{x'_0}\right)'. \tag{13}$$

Il n'y a plus qu'à substituer cette valeur de $\omega$ dans la formule (12) pour obtenir la condition

$$\frac{\partial^2 \log k}{\partial x\, \partial y} = k, \tag{14}$$

à laquelle doit satisfaire $k$. Cette condition exprime évidemment (n° 330) que l'équation correspondante doit être de *second* rang.

997. Nous avons vu (n° 389) que la valeur la plus générale de $k$ est la suivante

$$k = -\frac{2X'_1 Y'_1}{(X_1 - Y_1)^2}, \tag{15}$$

de sorte que, en remplaçant $\frac{x_2}{x'_0}$ par $X_3$, la valeur de $\omega$ va devenir

$$\omega = X_3\left(\frac{X''_1}{X'_1} - \frac{2X'_1}{X_1 - Y_1}\right) + X'_3.$$

Cette valeur devant avoir un module égal à 1, il faudra que l'on ait

$$\left[X_4\left(\frac{X''_2}{X'_2} - \frac{2X'_2}{X_2 - Y_2}\right) + X'_4\right]\left[X_3\left(\frac{X''_1}{X'_1} - \frac{2X'_1}{X_1 - Y_1}\right) + X'_3\right] = 1,$$

$X_2$, $Y_2$, $X_4$ étant les fonctions conjuguées de $X_1$, $Y_1$, $X_3$ respectivement.

En donnant à $x$ une valeur quelconque, on reconnaît immédiatement que les fonctions $Y_2$, $Y_1$ sont en relation homographique. On pourra donner à cette relation homographique la forme

$$Y_2 = Y_1,$$

si l'on remarque que l'expression (15) de $k$ ne change pas (n° 24) lorsqu'on soumet $X_1$, $Y_1$ à une même substitution linéaire à coefficients constants. Ainsi l'on peut *supposer que* $Y_1$ *soit une fonction réelle*.

Mais alors il faut évidemment choisir pour $\omega$ l'expression définie par l'équation (81) du Chapitre précédent; et l'on aura, en appliquant les résultats analytiques du n° 994 et supposant, ce qui est évidemment permis, Y réduit à $y$ par un changement de notations,

$$(16) \qquad \omega = e^{ix}\frac{X' - iX - iy}{X' + iX + iy}.$$

Pour écrire d'une manière rapide les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $p'$, $q'$, introduisons les notations

$$(17) \qquad \varphi_1(u) = \frac{2u - 2u'\dfrac{X'' + iX'}{X''' + X'}}{X' + iX + iy} - \frac{\left(u - u'\dfrac{X'' + iX'}{X''' + X'}\right)'}{X'' + iX'},$$

$$(18) \qquad \varphi_2(u) = \frac{2u}{X' + iX + iy} + iu',$$

et désignons de même par $\psi_1$, $\psi_2$ les symboles obtenus en changeant $i$ en $-i$. On aura, $X_1$ étant une fonction réelle,

$$(19) \qquad \alpha\omega = \varphi_1(X_1), \qquad \frac{\beta}{\omega} = \psi_1(X_1),$$

puis, $X_2$ et $Y_1$ étant encore des fonctions réelles,

$$(20) \qquad q'\omega = \varphi_1(X_2) + \varphi_2(Y_1), \qquad \frac{p'}{\omega} = \psi_1(X_2) + \psi_2(Y_1).$$

Les deux premières relations feront connaître la représentation sphérique. Il faudra ensuite calculer $\xi$, qui sera définie par la formule (5) où l'on substituera les valeurs précédentes de $\alpha$, $\beta$, $p'$, $q'$. Il restera encore à donner aux fonctions réelles $X_2$, $Y_1$ une forme telle que toute quadrature disparaisse de l'expression de $\xi$.

On voit que les surfaces à lignes de courbure planes dépendent de quatre fonctions arbitraires $X$, $X_1$, $X_2$, $Y_1$. Elles sont donc loin d'être les plus générales parmi celles qui correspondent à l'équation du second rang et qui dépendent, en réalité, de cinq fonctions

arbitraires, à savoir : X, deux fonctions figurant dans la représentation sphérique et deux autres dans les expressions de $p'$ et de $q'$.

998. Sans faire l'étude approfondie des surfaces à lignes de courbure planes, auxquelles M. Rouquet a consacré un Mémoire des plus remarquables, déjà cité [I, p. 114], nous ferons connaître une proposition qui les concerne et qui se rattache directement aux résultats du n° 972. Cette proposition peut s'énoncer comme il suit :

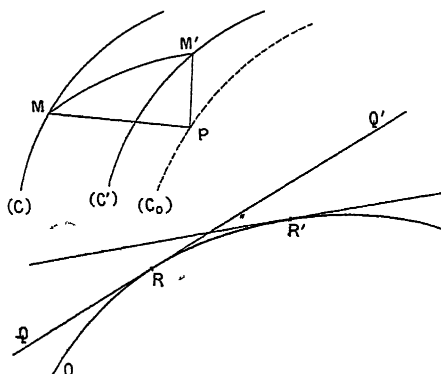
*Étant donnée une surface* $(\Sigma)$ *à lignes de courbure planes dans un système, soit* (D) *la développable enveloppe des plans des lignes de courbure. Supposons qu'elle se déforme de telle manière que ses génératrices, demeurent rectilignes, et qu'elle entraîne les lignes de courbure planes dans ses différents plans tangents; il existera une transformée* $(D_1)$ *de* (D) *pour laquelle toutes ces lignes de courbure viendront se placer sur une même développable* isotrope $(\Delta)$; *les lignes de seconde courbure venant alors coïncider avec les génératrices rectilignes de la développable* $(\Delta)$.

Pour démontrer cette proposition, nous commencerons par examiner ce que devient la surface $(\Sigma)$ lorsqu'on déforme la développable (D) de telle manière que ses génératrices demeurent rectilignes. Si l'on désigne par la lettre (C) les lignes de première courbure, situées dans les plans tangents de (D) et par la lettre $(C_1)$ les lignes de seconde courbure, il est clair que les tangentes aux lignes (C), aux points où elles sont rencontrées par une même courbe $(C_1)$, engendrent une développable dont l'arête de rebroussement $(K_1)$ est tracée sur la développable (D); de sorte que chaque courbe $(C_1)$ est une *développante* de l'arête de rebroussement $(K_1)$ qui lui correspond. Cette relation entre $(K_1)$ et $(C_1)$ ne se modifie nullement quand la développable (D) se déforme en entraînant dans ses plans tangents les courbes (C). On reconnaît donc immédiatement que, dans la nouvelle surface $(\Sigma')$ engendrée par les positions nouvelles des courbes (C), surface qui correspond point par point à $(\Sigma)$, les lignes de première et de seconde courbure correspondent respectivement aux lignes de première et de seconde courbure de $(\Sigma)$.

M. Rouquet a fait grand usage de la proposition que nous venons d'établir et qui est due à Ribaucour [1]. Elle ne nous est pas indispensable; mais elle aidera le lecteur à mieux comprendre le raisonnement suivant.

999. Soient (*fig.* 88) (C) une des lignes de première courbure

Fig. 88.




de (Σ), M un quelconque de ses points, M' un point infiniment voisin de M pris sur la ligne de seconde courbure ($C_1$) qui passe en M, P la projection de M' sur le plan de (C). Soit QQ' la génératrice de contact du plan de (C) avec la développable (D), R le point où cette génératrice touche l'arête de rebroussement (R) de cette développable; de sorte que chaque point R et, par suite, chaque plan tangent de (D) sera déterminé par l'arc $s$ de (R) compté à partir d'une origine fixe O prise sur (R). Le plan de la ligne de *première* courbure (C') qui passe en M' correspondra, par exemple, au point R' de l'arête de rebroussement, de sorte que l'angle des deux plans contenant les lignes de première courbure qui passent en M et en M' sera égal à $\frac{ds}{\tau}$, $ds$ désignant l'accroissement RR' de $s$ et $\frac{1}{\tau}$ étant la torsion de (R) en R. M'P

(1) RIBAUCOUR, *Sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères.* (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V et VI; 1879-1880).

est évidemment égal à cet angle multiplié par la distance de l'un des points M ou P à la droite d'intersection QQ' des deux plans osculateurs respectivement en R et en R'. Si donc $p$ désigne la distance du point M à la tangente QQ' en R, on aura d'abord, en négligeant les infiniment petits du second ordre

$$M'P = \frac{p\,ds}{\tau}.$$

Cela posé, considérons le triangle rectiligne MM'P : il est rectangle en P, son angle en M ne diffère que de quantités du second ordre de l'angle $\varphi$ que fait en ce point M la surface $(\Sigma)$ avec le plan de (C). On peut donc écrire

$$M'P = PM \operatorname{tang}\varphi;$$

et, si l'on porte cette valeur de M'P dans la relation précédente, il vient

$$\tau \operatorname{tang}\varphi = \frac{p\,ds}{PM}.$$

Telle est la relation que nous voulions établir. En voici maintenant les conséquences.

1000. Supposons d'abord que le point M se déplace sur la courbe (C); le premier membre de la relation précédente demeurera invariable, puisque l'angle $\varphi$ est le même pour tous les points de la courbe (C), d'après le théorème de Joachimsthal. Il en sera donc de même du second membre, qui devra se réduire par conséquent à une fonction de la seule variable $s$. On aura donc les deux égalités suivantes

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} \tau \operatorname{tang}\varphi &= f(s), \\ \frac{p\,ds}{PM} &= f(s). \end{aligned} \right.$$

La seconde s'interprète géométriquement de la manière la plus simple. Il est évident par la géométrie que si l'on déforme la développable (D) de telle manière qu'elle vienne s'appliquer sur un plan, celui de la courbe (C) par exemple, le point P sera à une distance infiniment petite du second ordre de celui où vient s'appliquer le point M'. La seconde relation précédente donne

donc une propriété de la famille de courbes sur laquelle viennent s'appliquer dans le plan les lignes de première courbure. A chacune de ces courbes (C), maintenant toutes situées dans le même plan, correspond une droite QQ' déterminée. Et, *pour chaque point de la courbe* ($C_0$) *infiniment voisine de* (C), *il y a un rapport constant entre la distance à la courbe* (C) *et la distance à la droite correspondante* QQ'. Cette propriété géométrique conduit à une équation aux dérivées partielles, qui a été formée et intégrée de la manière la plus élégante par M. Rouquet.

Laissant de côté l'étude de cette intéressante question, revenons à la première des relations précédentes

$$\tau \operatorname{tang} \varphi = f(s).$$

Elle nous montre immédiatement que, lorsqu'on déforme la développable (D), l'angle $\varphi$ varie de telle manière que le produit $\tau \operatorname{tang} \varphi$ demeure constant. Au lieu de considérer l'hypothèse où la développable (D) se réduit à un plan, supposons qu'on la déforme de telle manière que l'on ait, en chaque point de l'arête de rebroussement,

$$\tau = \pm i f(s),$$

il viendra alors

$$\operatorname{tang} \varphi = \mp i.$$

Et, par conséquent, l'angle du plan tangent à la surface et du plan de la ligne de courbure deviendra infini. Ce dernier plan, étant osculateur à l'arête de rebroussement de la développable dans sa nouvelle position, ne sera pas isotrope. Il faudra donc que le plan tangent à la surface le soit. Donc *la surface à lignes de courbure planes* ($\Sigma$) *aura été transformée en une développable isotrope.*

De tout ceci résulte donc le théorème suivant :

*Pour obtenir toutes les surfaces à lignes de courbure planes dans un système, on construit une développable isotrope quelconque* ($\Delta$) *et une développable non isotrope* ($D_1$). *On déforme ensuite* ($D_1$) *de telle manière que ses génératrices demeurent rectilignes et que ses plans tangents entraînent les courbes suivant lesquelles ils coupaient la développable* ($\Delta$). *L'en-*

*semble des courbes ainsi entraînées constitue la surface la plus générale à lignes de courbure planes dans un système* ([1]).

En reprenant le point de vue développé au Chapitre VI, on peut énoncer le théorème sous la forme suivante :

*Pour obtenir les surfaces précédentes, on prend deux développables* (D), ($D_1$) *applicables l'une sur l'autre avec correspondance des génératrices rectilignes. Si l'on fait rouler la développable* ($D_1$) *sur la développable* (D) *de telle manière que le contact ait lieu à chaque instant entre tous les points des génératrices correspondantes, toute développable isotrope* ($\Delta$) *invariablement liée à* ($D_1$) *sera coupée par les plans de contact successifs suivant les lignes de courbure de l'une des surfaces cherchées.*

**1001.** Alors même que ces théorèmes ne conduiraient pas, comme nous allons le voir, à une méthode rapide de recherche des surfaces à lignes de courbure planes dans un système, ils permettraient au moins d'expliquer de la manière la plus satisfaisante certains faits, ayant quelque chose de paradoxal, qui se présentent dans cette théorie.

On sait, par exemple, que, *si une des lignes de courbure planes est un cercle, toutes les autres sont des cercles;* que, si elle est algébrique, toutes les autres sont algébriques; que les lignes de courbure ne peuvent être toutes des coniques différentes du cercle, etc. Tous ces faits s'expliquent immédiatement par la remarque suivante, qui est évidente.

---

([1]) Cette proposition, donnée depuis longtemps dans mon enseignement, s'applique même aux surfaces pour lesquelles les plans des lignes de première courbure passent par une droite fixe. En effet, on doit attribuer en général une valeur nulle à la torsion d'une courbe plane; mais il faut remarquer cependant que, si cette courbe se réduit à une droite, la torsion devient indéterminée. Si l'on associe à chaque point de cette droite un plan déterminé passant par la droite, il est clair que la torsion prend en chaque point une valeur déterminée, dépendant d'ailleurs de la loi suivant laquelle on a associé les plans passant par la droite aux points de cette droite.

Dans le cas où les plans des lignes de courbure enveloppent un cône, il suffit de choisir une variable autre que $s$.

*Dès qu'une ligne de courbure plane est donnée, on connaît par cela même la développable isotrope* ($\Delta$), *qui doit être circonscrite à cette courbe en même temps qu'au cercle de l'infini. Par conséquent toutes les autres lignes de courbure ne peuvent être que des sections planes de cette développable, parfaitement connue.*

Si l'une des lignes de courbure est un cercle, la développable isotrope se décompose en deux points-sphères. Donc toutes les autres lignes de courbure sont des cercles.

Si l'une des lignes de courbure est algébrique, il en est de même de ($\Delta$) et, par suite, de ses sections planes quelconques.

Si l'une des lignes de courbure est une conique différente d'un cercle, ($\Delta$) est en général du 8$^e$ ordre; mais elle peut se réduire au 7$^e$, au 6$^e$, au 5$^e$ et même au 4$^e$, si son arête de rebroussement est une cubique gauche. Dans ce dernier cas seulement, la développable contient une famille de coniques; mais elles sont situées dans les plans tangents de la développable, qui sont tous isotropes. Donc il est impossible que toutes les lignes de courbure soient des coniques.

Voici les principes qui peuvent guider, si l'on recherche tous les cas dans lesquels les lignes de courbure sont algébriques et d'un degré déterminé.

Une surface réglée algébrique indécomposable étant donnée, si certaines de ses sections planes se décomposent, elles se composent uniquement d'un certain nombre de droites et d'une courbe algébrique indécomposable.

Si les lignes de courbure planes sont d'un degré déterminé $n$, il est nécessaire que la développable isotrope circonscrite à l'une de ces lignes se décompose en deux développables symétriques par rapport au plan de la courbe, c'est-à-dire que la ligne soit ce que Laguerre a appelé une *courbe de direction*.

Nous nous contenterons de signaler ici les deux hypothèses qui paraissent les plus simples. Il existe une développable isotrope du 5$^e$ ordre que l'on peut définir comme il suit. Elle est circonscrite à la courbe du 3$^e$ ordre définie par les équations

$$x = u - \frac{u^3}{3}, \qquad y = u^2, \qquad z = 0 \tag{22}$$

et elle est l'enveloppe du plan

(23) $$2ux - y(1-u^2) + iz(1+u^2) = u^2 + \frac{u^4}{3}.$$

Tous les plans définis par l'équation

(24) $$y - iz + u^2(y+iz) = u^2 + u^4,$$

où $u$ est considéré comme un paramètre variable, la coupent suivant les deux génératrices qui correspondent aux valeurs $u$, $-u$ du paramètre et suivant une courbe du 3$^e$ ordre; de sorte que la développable admet une famille de sections du 3$^e$ ordre, qui pourront devenir les lignes de courbure d'une infinité de surfaces de la nature de celles que nous cherchons. Comme les plans de ces sections sont parallèles à une droite, on ne pourra obtenir que des surfaces pour lesquelles ces lignes de courbure du 3$^e$ degré seront distribuées dans les plans tangents d'un cylindre d'ailleurs quelconque. C'est à cette classe qu'appartient la surface minima d'Enneper, étudiée au n° 207.

Considérons encore la cubique gauche isotrope définie par les équations

(25) $$x = u - \frac{u^3}{3}, \qquad y = u^2, \qquad z = i\left(u + \frac{u^3}{3}\right).$$

La développable isotrope dont elle est l'arête de rebroussement est l'enveloppe du plan défini par l'équation

(26) $$(1-u^2)x + 2uy + i(1+u^2)z + \frac{2u^3}{3} = 0.$$

Elle admet pour sections planes des courbes du quatrième ordre à trois points de rebroussement qui pourront devenir les lignes de courbure planes d'une infinité de surfaces.

**1002.** La génération des surfaces à lignes de courbure planes, telle que nous l'avons donnée plus haut, permet encore de résoudre assez simplement une question que M. Caronnet s'est proposée dans un travail récent (¹). On connaît déjà une première série de

---

(¹) TH. CARONNET, *Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes et égales* (*Comptes rendus*, t. CXVII, p. 842; 1893).

surfaces à lignes de courbure planes pour lesquelles toutes les lignes de courbure planes sont égales. Ce sont les surfaces moulures de Monge : elles correspondent au cas où la développable $(D_1)$ qui intervient dans la génération indiquée plus haut se réduirait à un plan. Mais parmi les autres surfaces à lignes de courbure planes, parmi celles dont toutes les lignes de courbure planes *sont des sections différentes* d'une même développable isotrope, y en a-t-il pour lesquelles ces lignes de courbure soient toutes égales? La question revient évidemment à la suivante.

Existe-t-il des développables isotropes admettant une famille de sections planes toutes superposables?

Ou encore :

Existe-t-il des développables isotropes dont l'arête de rebroussement ne cesse pas de coïncider avec elle-même quand on lui imprime une série de déplacements dépendant d'un paramètre variable au moins?

Il est clair que, si l'arête de rebroussement ne se réduit pas à un point, elle doit être nécessairement une hélice isotrope tracée sur un cylindre circulaire droit.

Cette remarque explique et fait prévoir tous les résultats obtenus par M. Caronnet. Nous n'entrerons pas dans le détail, nous contentant de signaler ici le cas particulier le plus élégant. La développable admettant pour arête de rebroussement l'hélice isotrope tracée sur un cylindre circulaire droit est coupée par tout plan passant par l'axe de ce cylindre suivant une *tractrice* ou *courbe aux tangentes égales*.

Soit, en effet, M un point de l'hélice isotrope. La sphère (S) inscrite au cylindre suivant le parallèle qui passe en M coupe le plan sécant suivant un cercle (C) ayant même centre O que la sphère. D'autre part, elle contient la tangente en M à l'hélice isotrope, tangente venant couper le cercle (C) en un point M′ qui décrira la section cherchée. Or, le plan osculateur de l'hélice, c'est-à-dire le plan tangent à la développable (Δ) dont elle est l'arête de rebroussement, est le plan OMM′ qui coupe le plan sécant suivant la tangente OM′ à la section. Cette tangente, étant un rayon du cercle (C), sera bien constante et égale au rayon de (S) ou au rayon de base du cylindre.

Un résultat analogue s'applique à toutes les sections planes

qui, on le reconnaîtra aisément, sont des courbes définies par la propriété de couper les cercles bitangents à une conique, section du cylindre par leur plan, sous des angles dont le sinus sera, pour un cercle déterminé, $\frac{R}{r}$, R étant le rayon de base du cylindre et $r$ le rayon de ce cercle.

1003. Laissant de côté toutes les applications particulières, qui mériteraient sans doute une étude détaillée, nous allons indiquer comment on peut traduire analytiquement la génération précédente des surfaces à lignes de courbure planes dans un système et présenter sous une forme entièrement réelle les équations qui définissent ces surfaces.

La génération indiquée emploie trois développables $(\Delta)$, $(D)$ et $(D_1)$. La développable $(\Delta)$ se déterminera par les équations si souvent employées dans la théorie des surfaces minima

$$(27) \qquad \begin{cases} (1-u^2)X'+2uY'+i(1+u^2)Z'-2F(u)=0, \\ -uX'+Y'+iuZ'-F'(u)=0, \end{cases}$$

entre lesquelles il faudra éliminer $u$. La première représente, pour une valeur déterminée de $u$, le plan tangent à la surface; et les deux, prises ensemble, la génératrice de contact de ce plan.

La développable $(D)$ sera pleinement définie aussi si l'on donne les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point de son arête de rebroussement $(R)$ exprimées en fonction de l'arc $s$ de $(R)$ et les neuf cosinus $a$, $a'$, $a''$, $b$, $b'$, $b''$, $c$, $c'$, $c''$ qui déterminent respectivement la direction de la tangente, de la normale principale et de la binormale à cette courbe.

De même la développable $(D_1)$ sera déterminée par les quantités $x_1$, $y_1$, $z_1$, $a_1$, $a'_1$, $a''_1$, $b_1$, $b'_1$, $b''_1$, $c_1$, $c'_1$, $c''_1$ analogues à celles que nous venons de définir pour $(D)$ et qui seront des fonctions de la même variable $s$ que les précédentes. En leurs points correspondants, les arêtes de rebroussement de $(D)$ et de $(D_1)$ ont, en effet, le même arc et aussi le même rayon de courbure.

Soit $(P_1)$ un plan tangent de $(D_1)$ touchant l'arête de rebroussement $(R_1)$ de $(D_1)$ au point $M_1$. Si $x'$, $y'$ désignent les coordonnées d'un point de ce plan rapportées à des axes formés par la tangente et la normale principale à $(R_1)$ en $M_1$, on aura évidem-

ment

$$(28)\quad \begin{cases} X' = x_1 + a_1 x' + b_1 y', \\ Y' = y_1 + a'_1 x' + b'_1 y', \\ Z' = z_1 + a''_1 x' + b''_1 y', \end{cases}$$

$X'$, $Y'$, $Z'$ étant les coordonnées du point par rapport aux axes fixes. Par suite, pour avoir la section de la développable ($\Delta$) par le plan ($P_1$), il faudra, dans les formules (27), remplacer $X'$, $Y'$, $Z'$ par leurs valeurs précédentes et éliminer $u$ entre les deux équations ainsi obtenues.

Supposons maintenant que la développable ($D_1$) se déforme et vienne coïncider avec (D). Le plan ($P_1$) viendra coïncider avec le plan correspondant (P) de (D). Les coordonnées $x'$, $y'$ de chaque point de la section demeureront invariables; mais, si l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées nouvelles du point ($x'$, $y'$) relativement aux axes fixes auxquels on a rapporté (D), on aura

$$(29)\quad \begin{cases} X = x + ax' + by', \\ Y = y + a'x' + b'y', \\ Z = z + a''x' + b''y', \end{cases}$$

de sorte que, pour obtenir la surface cherchée, il faudra éliminer $u$, $X'$, $Y'$, $Z'$, $x'$, $y'$, $s$ entre les huit équations (27), (28), (29).

Remarquons que l'on a

$$(30)\quad \begin{cases} x' = a(X-x) + a'(Y-y) + a''(Z-z) = \mathrm{S}\, a(X-x), \\ y' = b(X-x) + b'(Y-y) + b''(Z-z) = \mathrm{S}\, b(X-x), \\ 0 = c(X-x) + c'(Y-y) + c''(Z-z) = \mathrm{S}\, c(X-x); \end{cases}$$

tout se ramènera donc à éliminer $s$ et $u$ entre les deux équations

$$(31)\quad \begin{cases} 0 = \mathrm{S}\, c(X-x), \\ (1-u^2)\left[x_1 + a_1 \mathrm{S}\, a(X-x) + b_1 \mathrm{S}\, b(X-x)\right] \\ \quad + 2u\left[y_1 + a'_1 \mathrm{S}\, a(X-x) + b'_1 \mathrm{S}\, b(X+x)\right] \\ \quad + i(1+u^2)\left[z_1 + a''_1 \mathrm{S}\, a(X-x) + b''_1 \mathrm{S}\, b(X-x)\right] - 2F(u) = 0, \end{cases}$$

et la dérivée de la seconde par rapport à $u$. Les variables $u$ et $s$, nous l'avons vu (n° 998), seront les paramètres des deux familles de lignes de courbure.

1004. Il n'y aura aucune difficulté à calculer explicitement les fonctions de $s$ qui entrent dans les formules. En effet, les arêtes de rebroussement (R) et ($R_1$) ont, aux points correspondants, la même courbure, mais non la même torsion. Si l'on se donnait la courbure et la torsion en fonction de l'arc, il faudrait, pour déterminer la courbe, intégrer une équation de Riccati. Mais, la torsion étant arbitraire, il est clair qu'on pourra toujours la déterminer par la condition que cette équation de Riccati ait une solution donnée à l'avance, ce qui permettra de ramener à des quadratures la détermination de toutes les fonctions de $s$ qui figurent dans la solution. Nous avons vu : 1° qu'on peut mettre la solution sous une forme entièrement réelle; 2° qu'on peut faire disparaître toutes les quadratures par un choix convenable des fonctions arbitraires. On peut établir tous ces résultats par la Géométrie.

Remarquons d'abord que l'arête de rebroussement ($R_1$) a, en chacun de ses points, pour torsion une fonction de $s$ qui est une imaginaire pure $i f(s)$. Les formules fondamentales

$$\frac{da_1}{ds} = \frac{b_1}{\rho}, \qquad \frac{dc_1}{ds} = \frac{b_1}{\tau}, \qquad \frac{dx_1}{ds} = a_1$$

nous montrent alors qu'on pourra la rapporter à des axes tels que $z_1$, $a''_1$, $b''_1$, $c_1$, $c'_1$ *soient des imaginaires pures, les autres quantités* $x_1$, $y_1$, $a_1$, $b_1$, $a'_1$, $b'_1$, $c''_1$ *étant réelles*. Si donc on prend, dans les formules (27) pour $F(u)$ une fonction réelle de $u$, il est clair que les deux équations finales (31) présenteront la solution sous une forme entièrement réelle; $x, y, z, a, b, \ldots$ devant évidemment être supposées réelles puisqu'elles se rapportent à la développable réelle (D).

1005. Indiquons maintenant comment on pourra faire disparaître les quadratures qui entrent dans la solution. Parmi les différents moyens que l'on peut employer, voici celui qui nous a paru le plus simple.

Les fonctions de $s$ qui figurent dans la solution servent en dé-

finitive à définir le roulement de $(D_1)$ sur $(D)$. Si donc, au lieu de $(\Delta)$, nous prenons un point-sphère O invariablement lié à $(D_1)$, ce point-sphère coupera le plan de contact suivant un cercle qui engendrera une surface à lignes de courbure circulaires dont les lignes de seconde courbure correspondront aux génératrices rectilignes du point-sphère et seront, par suite, pleinement connues. Inversement, si nous connaissons une surface à lignes de courbure circulaires dont on puisse obtenir toutes les lignes de courbure sans aucune quadrature, la construction géométrique donnée au nº 970 s'appliquera ici et permettra de construire autant de cercles qu'on le voudra engendrant des surfaces à lignes de courbure circulaires. Si l'on prend, conformément à la méthode indiquée, tous ceux de ces cercles qui, dans un plan déterminé, enveloppent une courbe (K), ils envelopperont, dans les autres plans, des courbes dont l'ensemble constituera la surface cherchée. Ainsi tout est ramené à trouver une surface à lignes de courbure circulaires, la plus générale possible, dont toutes les lignes de courbure se déterminent sans aucune intégration.

**1006.** Un premier moyen de résoudre cette intéressante question consiste à employer la transformation de M. Lie qui fait correspondre à des surfaces enveloppes de sphères les surfaces réglées engendrées par les droites qui correspondent à ces sphères, et aux lignes de courbure des premières surfaces les lignes asymptotiques des secondes. Dans un élégant article publié en 1888, M. Kœnigs (1) a montré comment on peut écrire sans aucun signe de quadrature les équations qui définissent une surface réglée de manière à mettre en évidence les lignes asymptotiques.

D'autre part, dans le travail cité plus haut, M. Rouquet a indiqué le procédé géométrique suivant.

Étant donnée une surface à lignes de courbure sphériques, il existe toujours, nous le verrons, une surface de même nature admettant la même représentation sphérique et pour laquelle les

(1) G. Kœnigs, *Détermination sous forme explicite de toute surface réglee rapportée à ses lignes asymptotiques et, en particulier, de toutes les surfaces réglées à lignes asymptotiques algébriques* (*Comptes rendus*, t. CVI, p. 51-54).

sphères qui contiennent les lignes de courbure passent par un point fixe ou coupent à angle droit une sphère fixe. Admettons ce résultat qui s'applique aux surfaces à lignes de courbure circulaires lorsqu'on choisit les sphères qui leur sont inscrites parmi celles qui contiennent la ligne de courbure circulaire. Nous voyons qu'à toute surface ($\Sigma$) à lignes de courbure circulaires, on pourra faire correspondre une surface ($\Sigma'$) de même représentation sphérique, enveloppe de sphères variables (U) orthogonales à une sphère fixe (S). On aura *deux* lignes de courbure non circulaires de ($\Sigma'$), celles qui sont décrites par les deux points où chaque ligne de courbure circulaire coupe la sphère (S). Nous allons voir d'abord qu'on peut construire la surface de manière à en obtenir une troisième *sans intégration*.

Prenons, en effet, une développable (D') dont on sache déterminer les lignes de courbure et soit (L) une de ses lignes de courbure. Construisons les sphères (U) tangentes à (D') aux différents points de (L) et orthogonales à (S). Elles envelopperont une surface ($\Sigma'$) admettant (L) pour ligne de courbure et satisfaisant, par suite, à la condition demandée.

Or, il résulte d'un théorème de M. Émile Picard ([1]) que le rapport anharmonique des points où quatre lignes de courbure non circulaires rencontrent une même ligne de courbure circulaire est constant. Cette proposition fournira évidemment toutes les lignes de courbure sans aucune intégration dès que trois d'entre elles seront connues, comme il arrive pour la surface ($\Sigma'$).

A la vérité, nous avons admis que l'on sait construire sans aucune quadrature une développable (D') dont on peut déterminer une ligne de courbure. Voici comment on pourra opérer.

Traçons arbitrairement une courbe (C) sur une sphère, puis, dans l'espace, une courbe (C') dont les tangentes soient parallèles à celles de (C); ce qui se fera sans aucune intégration, (C') étant l'arête de rebroussement d'une développable dont les plans tangents sont assujettis à l'unique condition d'être parallèles aux plans osculateurs de (C). Menons ensuite par chaque tangente

---

([1]) E. Picard, *Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 2e série, t. VI, p. 362; 1877).

de (C′) un plan parallèle au plan tangent à la sphère au point correspondant de (C). Les plans ainsi obtenus enveloppent une développable qui admet évidemment (C′) comme ligne de courbure.

1007. Nous avons ainsi construit l'enveloppe de sphères (Σ′), dont les lignes de courbure sont déterminées sans aucune intégration. Pour obtenir l'enveloppe (Σ) nous invoquerons le théorème suivant, compris comme cas particulier dans une proposition que nous donnerons plus loin.

*Lorsque deux surfaces enveloppes de sphères (Σ), (Σ′) ont même représentation sphérique, les sphères inscrites aux deux surfaces suivant deux lignes de courbure correspondantes, ces deux lignes de courbure et les cônes droits circonscrits suivant elles aux deux surfaces forment, à chaque instant, deux figures homothétiques. Les courbes décrites par les sommets des deux cônes ont leurs tangentes constamment parallèles, et le centre de l'homothétie précédente est le point où la droite joignant les sommets des deux cônes correspondants touche la courbe qu'elle enveloppe nécessairement.*

On voit donc que, pour obtenir l'enveloppe cherchée (Σ), il suffira de construire une courbe dont les tangentes soient assujetties à l'unique condition d'être parallèles à celles de la courbe décrite par les sommets des cônes droits circonscrits à (Σ′), puis d'appliquer le théorème précédent, qui permettra de déduire de chacun des cercles de (Σ′) le cercle correspondant de (Σ).

# CHAPITRE X.

## SURFACES ISOTHERMIQUES A LIGNES DE COURBURE PLANES.

Rappel des différentes classes de surfaces à lignes de courbure planes déterminées ou étudiées dans le cours de cet Ouvrage. — Indication de cas particuliers dans lesquels ces surfaces sont isothermiques. — Recherche systématique des surfaces qui satisfont à cette double condition d'avoir leurs lignes de courbure planes, au moins dans un système, et d'être isothermiques. — Mise en équation du problème. — Intégration des équations linéaires auxquelles satisfont les rotations. — Tout se ramène à la détermination d'une fonction $h$ satisfaisant à deux équations aux dérivées partielles. — Application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce et des méthodes de M. Hermite à cette intégration. — La solution dépend des fonctions elliptiques et comporte une fonction arbitraire. — Explication de ce dernier résultat et construction géométrique de la surface. — Cas particulier où le module de la fonction elliptique devient nul.

---

**1008.** Dans différentes parties de cet Ouvrage, nous avons déterminé différentes classes de surfaces à lignes de courbure planes : celles pour lesquelles les plans des lignes de courbure passent par une droite fixe (nº 94); celles pour lesquelles *toutes* les lignes de courbure sont planes (nº 105); celles pour lesquelles la courbure totale est constante (nºs 820, 821). Pour compléter ces études particulières, nous allons déterminer une classe nouvelle de surfaces à lignes de courbure planes, que l'on est conduit à rechercher par les remarques suivantes.

D'après une remarque faite par M. O. Bonnet (nº 771), on peut déduire, de chaque surface dont la courbure *totale* est constante, deux surfaces dont la courbure *moyenne* est constante et qui sont parallèles à la première. On voit donc qu'aux surfaces à courbure totale constante découvertes par M. Enneper (nºs 814 à 821) correspondent des surfaces à courbure moyenne constante qui auront, elles aussi, leurs lignes de courbure planes dans un système et

sphériques dans l'autre. Ces dernières surfaces ont été l'objet d'une étude de M. Max Voretzsch ([1]).

Or, d'après un résultat que l'on doit encore à M. O. Bonnet (n$^{os}$ 433, 775), les surfaces dont la courbure moyenne est constante peuvent être divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure; ou, ce qui est la même chose, les lignes de courbure de chaque système constituent une famille de courbes isothermes.

Il résulte donc de la recherche faite par M. Enneper qu'il existe des surfaces satisfaisant à cette double condition que leurs lignes de courbure soient planes dans un système et, en outre, que la surface puisse être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. On est ainsi conduit à chercher toutes les surfaces, autres que les surfaces de révolution, jouissant de cette double propriété. La solution de ce problème fait l'objet du présent Chapitre.

Le résultat que l'on obtient est remarquable; bien que les surfaces cherchées doivent satisfaire à la fois à deux équations aux dérivées partielles, on trouve qu'elles contiennent dans leur équation deux constantes et une fonction arbitraire. On a donc, d'une part, une famille de surfaces à lignes de courbure planes dans un système, jouissant d'une propriété géométrique à laquelle les géomètres attachent quelque intérêt; et, à un autre point de vue, on ajoute aux surfaces en très petit nombre dont les lignes de courbure forment un système isotherme toute une famille de surfaces qui, par cette propriété, viennent se placer à côté des surfaces de révolution et des surfaces minima.

Malgré le degré de généralité de la solution, on peut obtenir une construction géométrique simple de toutes les surfaces qui correspondent à des formes différentes de la fonction arbitraire. D'ailleurs les calculs que l'on doit développer pour obtenir les expressions des coordonnées d'un point de la surface cherchée en fonction de deux variables indépendantes offrent une intéressante

---

([1]) Max Voretzsch, *Untersuchung einer speciellen Fläche constanter mittlerer Krümmung bei welcher die eine der beiden Schaaren der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet ist.* Göttingen, 1883.

application de la belle théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce qui est due à M. Hermite. A tous ces points de vue, il y a quelque utilité à faire connaître dans ses points essentiels la méthode suivie.

1009. Je rappellerai d'abord les formules de la théorie des surfaces dont nous aurons à faire usage.

Soit

$$ds^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2 \tag{1}$$

l'expression de l'*élément linéaire* de la surface. Les six quantités $p, q, r, p_1, q_1, r_1$ doivent satisfaire aux relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} &= q r_1 - r q_1, \\ \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} &= r p_1 - p r_1, \\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= p q_1 - q p_1; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$A q_1 + C p = 0, \qquad r = -\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}, \qquad r_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}. \tag{3}$$

Désignons par $a$, $a'$, $a''$ les cosinus directeurs de la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ ou, ce qui est la même chose, de la tangente à l'arc $A\,du$; par $b$, $b'$, $b''$ les cosinus directeurs de la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ ou à l'arc $C\,dv$, et enfin par $c$, $c'$, $c''$ les cosinus directeurs de la normale à la surface. On devra avoir, comme on sait,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial u} &= br - cq, & \frac{\partial a}{\partial v} &= b r_1 - c q_1, \\ \frac{\partial b}{\partial u} &= cp - ar, & \frac{\partial b}{\partial v} &= c p_1 - a r_1, \\ \frac{\partial c}{\partial u} &= aq - bp, & \frac{\partial c}{\partial v} &= a q_1 - b p_1, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

et les équations analogues pour $a'$, $b'$, $c'$; $a''$, $b''$, $c''$. Les équations (5) feront connaître les neuf cosinus; puis on obtiendra les coordonnées rectangulaires X, Y, Z d'un point de la surface ex-

primées en $u$, $v$ par les quadratures

$$(6)\qquad \begin{cases} dX = A a\, du + C b\, dv, \\ dY = A a'\, du + C b'\, dv, \\ dZ = A a''\, du + C b''\, dv. \end{cases}$$

Remarquons enfin que, si l'on emploie la représentation sphérique de Gauss, c'est-à-dire si, par le centre d'une sphère de rayon 1, on mène une parallèle à la normale, prolongée jusqu'à son intersection avec la sphère, le point de la sphère correspondant au point (X, Y, Z) de la surface aura pour coordonnées $c$, $c'$, $c''$. L'élément linéaire de la sphère sera donc déterminé par la formule

$$(7)\qquad ds'^2 = \Sigma\, dc^2 = (p\, du + p_1\, dv)^2 + (q\, du + q_1\, dv)^2.$$

**1010.** Après avoir rappelé les formules précédentes, nous allons les appliquer au problème proposé ; nous supposerons les surfaces cherchées rapportées à leurs lignes de courbure. Cela s'exprimera, comme on sait [II, p. 386], par les deux équations

$$(8)\qquad p = 0, \qquad q_1 = 0.$$

De plus, comme les lignes de courbure doivent être isothermes, on pourra poser

$$(9)\qquad A = C = e^h,$$

$h$ désignant une nouvelle variable, substituée à la valeur commune de A et de C.

La formule (7) se réduit, dans le cas qui nous occupe, à la suivante :

$$ds'^2 = p_1^2\, dv^2 + q^2\, du^2.$$

Pour exprimer que les lignes de courbure de l'un des systèmes, par exemple les lignes $v = \text{const.}$, sont planes, il suffira d'exprimer que les lignes qui leur correspondent sur la sphère sont des cercles, c'est-à-dire que leur courbure géodésique est constante : cela conduit à l'équation

$$(10)\qquad q p_1 = -V \frac{\partial q}{\partial v},$$

où V désigne une fonction de $v$.

Les équations (8), (9), (10) sont l'expression complète des conditions géométriques auxquelles doit satisfaire la surface cherchée. Si on les joint aux équations (2) et (3), on en déduira les valeurs suivantes des six quantités $p$, $q$, ... :

$$(11)\quad \begin{cases} p = 0, & p_1 = -V' - V\dfrac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial h}{\partial v}}; \\ q = V\dfrac{\partial h}{\partial v}, & q_1 = 0, \\ r = -\dfrac{\partial h}{\partial v}, & r_1 = \dfrac{\partial h}{\partial u}, \end{cases}$$

V′ désignant la dérivée de V; en outre, la fonction $h$ devra satisfaire aux deux équations aux dérivées partielles

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial h}{\partial v}}\right) = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v},$$

$$(13)\qquad (1 + V^2)\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + VV'\frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = 0.$$

L'intégration simultanée de ces équations est donc la première recherche que nous ayons à entreprendre.

L'équation (12) est du troisième ordre, mais il est aisé de l'intégrer complètement. En effet, si nous multiplions ses deux termes par $\dfrac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial h}{\partial v}}$, ils deviennent l'un et l'autre des dérivées exactes par rapport à $v$. Une première intégration donne ainsi

$$\left(\frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial h}{\partial v}}\right)^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \varphi(u).$$

On peut écrire cette équation comme il suit :

$$\frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \varphi(u)}} = \frac{\partial h}{\partial v},$$

et une nouvelle intégration par rapport à $v$ nous donne

$$(14) \qquad \mathrm{L}\left[\frac{\partial h}{\partial u}+\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2+\varphi(u)}\right]=h+f(u).$$

Il est vrai que nous avons négligé la solution particulière fournie par l'équation

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2+\varphi(u)=0;$$

mais il est aisé de voir, en la combinant avec l'équation (12), qu'elle ne donne aucune autre solution du problème proposé que les surfaces de révolution. Cette solution était évidente *a priori*, et nous pouvons la négliger.

L'équation (14) peut être mise sous la forme

$$(15) \qquad \frac{\partial h}{\partial u}=\mathrm{U}e^h+\mathrm{U}_1e^{-h},$$

où U et $\mathrm{U}_1$ sont des fonctions quelconques de $u$. Il serait facile, en leur donnant des formes convenables, d'achever l'intégration; mais il nous a paru préférable de conserver l'équation (15).

Si, dans l'équation (13), on substitue à la variable $v$ la variable $v_1$ définie par l'équation

$$(16) \qquad dv_1=\frac{dv}{\sqrt{1+\mathrm{V}^2}},$$

elle prend la forme très simple

$$(17) \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2}=0.$$

Tout se réduit donc à l'intégration simultanée des équations (15) et (17).

En différentiant l'équation (15), on obtiendra la valeur de $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}$, que l'on pourra exprimer en fonction de $h$ et de $u$. Portant cette valeur dans l'équation (17), on obtiendra

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2}+\mathrm{U}'e^h+\mathrm{U}_1'e^{-h}+\mathrm{U}^2e^{2h}-\mathrm{U}_1^2e^{-2h}=0.$$

Multiplions par $2\frac{\partial h}{\partial v_1}$ et intégrons par rapport à $v_1$, nous aurons

$$(18)\qquad \left(\frac{\partial h}{\partial v_1}\right)^2 + 2U'e^h - 2U'_1e^{-h} + U^2e^{2h} + U_1^2e^{-2h} + U_2 = 0,$$

$U_2$ désignant une nouvelle fonction de $u$.

Les équations (15) et (18) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \varphi(h, u),$$
$$\left(\frac{\partial h}{\partial v_1}\right)^2 + f(h, u) = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(19)\qquad \begin{cases} \varphi(h, u) = Ue^h + U_1e^{-h}, \\ f(h, u) = 2U'e^h - 2U'_1e^{-h} + U^2e^{2h} + U_1^2e^{-2h} + U_2. \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire par la différentiation deux valeurs différentes pour $\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v_1}$; et, en exprimant que ces valeurs sont égales, nous trouverons l'équation de condition

$$(20)\qquad 2f\frac{\partial\varphi}{\partial h} - \varphi\frac{\partial f}{\partial h} - \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Je dis que cette équation doit avoir lieu identiquement. En effet, s'il n'en était pas ainsi, elle déterminerait $h$, qui serait fonction de la seule variable $u$; et la surface cherchée serait une surface de révolution. Nous avons déjà écarté cette solution, qui est évidente *a priori*.

En écrivant que l'équation (20) a lieu identiquement, c'est-à-dire que les coefficients des différentes puissances de $e^h$ sont nuls, nous obtenons les trois équations

$$\frac{U''}{U} = \frac{U''_1}{U_1} = U_2 - 2UU_1,$$
$$6UU'_1 + 6U'U_1 + U'_2 = 0.$$

La dernière s'intègre immédiatement et l'on est ramené au système

$$(21)\qquad \begin{cases} \frac{U''}{U} = \frac{U''_1}{U_1} = U_2 - 2UU_1, \\ 6UU_1 + U_2 = C_1, \end{cases}$$

où $C_1$ désigne une constante arbitraire. Il faudra donc d'abord déterminer les fonctions U, puis intégrer le système des équations (15) et (18) ou, ce qui est plus simple, comme nous le verrons, le système *équivalent* des équations (15) et (17).

1011. Je commence par l'intégration du système (21). On déduit de la première équation

$$U_1 U' - U U_1' = C,$$

C désignant une constante.

Si l'on prend comme inconnue auxiliaire

$$UU_1 = \theta,$$

on trouve

$$U_2 = C_1 - 6\theta,$$

$$U = \sqrt{\theta}\, e^{\int \frac{C\,du}{2\theta}}, \qquad U_1 = \sqrt{\theta}\, e^{-\int \frac{C\,du}{2\theta}},$$

$$\frac{U''}{U} = \frac{U_1''}{U_1} = C_1 - 8\theta;$$

et $\theta$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(22) \qquad 2\theta\theta'' - \theta'^2 + C^2 = 4\theta^2(C_1 - 8\theta).$$

Différentions cette équation, nous obtiendrons

$$\theta''' = 4\theta'(C_1 - 12\theta),$$

d'où nous déduirons par l'intégration

$$\theta'' = 4C_1\theta - 24\theta^2 + C_2.$$

On déduit immédiatement de cette dernière équation que l'inconnue auxiliaire $\theta$ dépend des fonctions elliptiques et qu'elle doit être de la forme

$$A + B\,\mathrm{sn}^2\frac{u - u_0}{\alpha},$$

A, B, $u_0$, $\alpha$ et le module $k$ de la fonction elliptique étant des constantes convenablement choisies. Mais, comme on peut, sans altérer l'élément linéaire de la surface cherchée, défini par la formule

$$ds^2 = e^{2h}(du^2 + dv^2),$$

remplacer $u - u_0$ par $\alpha u$, à la condition de remplacer $v$ par $\alpha v$ et $h$ par $h - 2\,\mathrm{Log}\,\alpha$, il est clair que l'on pourra, sans restreindre la généralité, prendre pour $\theta$ la valeur suivante

$$A + B\,\mathrm{sn}^2 u,$$

que l'on peut aussi écrire, en introduisant une constante $\omega$,

$$B(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 \omega).$$

En exprimant que cette valeur satisfait à l'équation (22), nous obtenons les trois relations

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} k^2 \,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega,\\ C_1 &= 3k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - 1 - k^2,\\ \theta &= \frac{k^2}{4}(\mathrm{sn}^2\omega - \mathrm{sn}^2 u).\end{aligned}\right.$$

Les deux premières feront connaître $k$, $\omega$ en fonction de $C$, $C_1$; la dernière donnera $\theta$.

Quant aux deux fonctions $U$, $U_1$, elles doivent satisfaire l'une et l'autre à l'équation

$$\frac{y''}{y} = C_1 - 8\theta$$

ou

$$\frac{y''}{y} = 2k^2\,\mathrm{sn}^2 u - 1 - k^2 + k^2\,\mathrm{sn}^2\omega,$$

et, en outre, leur produit doit être égal à $\theta$. On reconnaît le cas le plus simple de l'équation de Lamé, si complètement étudiée par M. Hermite; et les solutions $U$, $U_1$ sont précisément celles dont le produit est une fonction entière de $\mathrm{sn}^2 u$.

Il résulte des recherches de M. Hermite (*Comptes rendus*, t. LXXXV) que l'on aura

$$2iU = \rho\,\frac{H(u+\omega)\,H'(0)}{\Theta(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{-u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

$$2iU_1 = \frac{1}{\rho}\,\frac{H(u-\omega)\,H'(0)}{\Theta(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

$\rho$ étant une constante à laquelle on pourra donner une valeur quelconque; car sa variation donne une série de surfaces semblables à l'une quelconque d'entre elles. Nous prendrons $\rho = -i$, et les

valeurs définitives de U, $U_1$ seront

$$(24)\quad \begin{cases} U = -\dfrac{H'(o)\,H(u+\omega)}{2\Theta(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{-u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}, \\[2ex] U_1 = \dfrac{H'(o)\,H(u-\omega)}{2\Theta(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}. \end{cases}$$

**1012.** Nous avons maintenant à intégrer le système formé par les deux équations

$$\frac{\partial h}{\partial u} = U e^{h} + U_1 e^{-h},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2} = o,$$

où U, $U_1$ désignent les fonctions définies par les formules (24).

La première de ces équations appartient à un type que l'on sait intégrer dès que l'on en connaît une solution particulière. Il suffit, en effet, de prendre comme inconnue soit $e^h$, soit $e^{-h}$; et l'on est ramené à une équation de Riccati; par conséquent, les valeurs de $e^h$ correspondantes à quatre solutions particulières auront entre elles un rapport anharmonique constant, et l'intégrale générale sera donnée par une formule

$$e^h = \frac{P + QC}{R + SC},$$

où C désignera la constante arbitraire par rapport à $u$, fonction de $v_1$, et où P, Q, R, S seront des fonctions déterminées de $u$. Toute la difficulté se réduit donc à la recherche de solutions particulières de cette équation.

Or reportons-nous à l'équation (20) qui a lieu identiquement. Elle exprime évidemment que les fonctions $h$ de $u$, définies par l'équation

$$f(h, u) = 2U'e^h - 2U_1' e^{-h} + U^2 e^{2h} + U_1^2 e^{-2h} + U_2 = o,$$

sont précisément des solutions particulières de l'équation à intégrer. Il suffira donc de résoudre l'équation

$$(25)\qquad U^2 e^{2h} + 2U'e^h + U_2 - 2U_1' e^{-h} + U_1^2 e^{-2h} = o,$$

qui est du quatrième degré par rapport à $e^h$, et l'on aura quatre

solutions particulières qui permettront d'écrire l'intégrale générale cherchée.

Les invariants $i$ et $j$ de cette équation ont pour valeurs

$$i = \frac{1}{12}(1 - k^2 + k^4),$$

$$j = \frac{1}{432}(1 + k^2)(2k^2 - 1)(k^2 - 2).$$

La résolvante du troisième degré

$$4\rho^3 - i\rho + j = 0$$

a ses racines rationnelles

$$\frac{1 + k^2}{12}, \quad \frac{1 - 2k^2}{12}, \quad \frac{k^2 - 2}{12};$$

et, par des calculs qu'il me paraît inutile de reproduire, on obtient les expressions suivantes des quatre racines cherchées :

$$(26) \qquad e^h = \frac{\Theta\left(\frac{u + \gamma - \omega}{2}\right)\Theta\left(\frac{u - \gamma - \omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u + \gamma + \omega}{2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{u - \gamma + \omega}{2}\right)} e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

où l'on donne à $\gamma$ successivement les quatre valeurs

$$0, \quad 2\mathrm{K}, \quad 2i\mathrm{K}', \quad 2\mathrm{K} + 2i\mathrm{K}'.$$

D'ailleurs, comme on peut donner à l'expression de $e^h$ la forme

$$(27) \qquad e^h = \frac{\Theta^2\left(\frac{u - \omega}{2}\right)}{\Theta^2\left(\frac{u + \omega}{2}\right)} \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{sn}^2\frac{u - \omega}{2}}{k\operatorname{sn}^2\frac{u + \omega}{2} - k\operatorname{sn}^2\frac{\gamma}{2}} e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

qui est linéaire par rapport à la constante $k\operatorname{sn}^2\frac{\gamma}{2}$, on voit que l'intégrale générale cherchée sera donnée par l'une quelconque des formes équivalentes (26) ou (27), où $\gamma$ sera la constante arbitraire.

Mais $\gamma$, qui ne dépend pas de $u$, est ici une fonction de $v_1$ : il reste à la déterminer par la condition que $h$ satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2} = 0.$$

Exprimons que cette équation est vérifiée pour toutes les valeu de $u$; nous aurons les équations

$$\gamma'^2 + 1 = 0, \qquad \gamma'' = 0,$$

qui donnent

$$\gamma = \pm i v_1,$$

en négligeant une constante additive, que l'on peut toujours su poser réunie à $v_1$.

En résumé, on trouve, pour la valeur définitive de $h$, la form

$$(28) \qquad e^h = \frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)\Theta\left(\frac{u-iv_1-\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)H\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)} e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}};$$

et l'on connaît complètement l'élément linéaire de la surface ch chée, aussi bien que les six rotations $p, q, r, p_1, q_1, r_1$.

En éliminant $v_1$ entre l'équation (28) et sa dérivée, on vérifi qu'on retrouve bien l'équation (15) qu'il s'agissait d'intégrer.

**1013.** Il reste maintenant à indiquer comment on trouvera neuf cosinus $a, a', a'', \ldots$ et les coordonnées rectangulaires d point de la surface. Mais auparavant je définirai une nouv fonction qui jouera un rôle essentiel dans cette recherche.

Considérons la fonction

$$\frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{\frac{u+iv_1}{2}\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}$$

de l'argument complexe $u + iv_1$ : il résulte de la formule ( que $e^{\frac{h}{2}}$ est le module de cette fonction. On pourra donc poser

$$(29) \qquad e^{\frac{h+i\sigma}{2}} = \frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{\frac{u+iv_1}{2}\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

et l'on obtiendra pour $\sigma$ l'expression

$$(30)\qquad e^{i\sigma} = \frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)\Theta\left(\frac{u-iv_1-\omega}{2}\right)} e^{iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

D'ailleurs, comme $h+i\sigma$ est une fonction de la variable complexe $u+iv_1$, on aura les équations bien connues

$$(31)\qquad \frac{\partial h}{\partial v_1} = -\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \qquad \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial \sigma}{\partial v_1},$$

qui nous seront utiles.

La fonction $i\sigma$ ne diffère de $h$ que par les notations. Elle satisfait, par conséquent, à une équation différentielle en $v_1$, tout à fait semblable à l'équation (15),

$$(32)\qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v_1} = \mathrm{M}e^{i\sigma} + \mathrm{N}e^{-i\sigma},$$

M et N ayant les valeurs suivantes

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M} &= \frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(\omega+iv_1)}{2\,\Theta(\omega)\,\mathrm{H}(iv_1)} e^{-iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},\\ \mathrm{N} &= -\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(\omega-iv_1)}{2\,\Theta(\omega)\,\mathrm{H}(iv_1)} e^{iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}. \end{aligned}\right.$$

Nous verrons plus loin comment la Géométrie fait prévoir l'existence de cette équation. La valeur de $\sigma$, contenant d'ailleurs l'arbitraire $u$ qui ne figure pas dans l'équation (32), donne, par conséquent, l'intégrale générale de cette équation différentielle.

**1014.** Quand on connaît l'élément linéaire d'une surface et les six quantités qui figurent dans les formules de Codazzi, il reste à déterminer les neuf cosinus et les coordonnées rectangulaires X, Y, Z. On est conduit à une seule surface; mais la détermination de cette surface dépend, en général, de l'intégration d'une équation de Riccati. On a de nombreux exemples dans lesquels on se trouve arrêté, où l'intégration à effectuer paraît réellement impossible.

Dans le cas actuel, on peut terminer les calculs, obtenir les

neuf cosinus et les coordonnées rectangulaires de la manière suivante :

Considérons un point de la surface et la tangente à la ligne de courbure plane $v =$ const. qui passe en ce point. Les cosinus directeurs de cette tangente sont, d'après les notations du n° 1009, $a$, $a'$, $a''$.

Si, par le centre d'une sphère de rayon 1, nous menons une parallèle à cette tangente, elle coupera la sphère en un point dont les coordonnées seront $a$, $a'$, $a''$; nous aurons ainsi un mode de représentation sphérique de la surface distinct de celui de Gauss et qui va nous être très utile.

L'élément linéaire de la sphère sera donné par la formule

$$dS^2 = da^2 + da'^2 + da''^2,$$

ou, en employant les formules (5) et (11),

$$dS^2 = V^2 \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 du^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v} du - \frac{\partial h}{\partial u} dv\right)^2.$$

Introduisons, en tenant compte de la formule (16), $dv_1$ à la place de $dv$ et servons-nous des formules (31) pour substituer les dérivées de $\sigma$ à celles de $h$. Nous obtiendrons ainsi l'expression très simple

$$(34) \qquad dS^2 = d\sigma^2 + V^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}\right)^2 dv_1^2.$$

Cette formule montre que les lignes $v_1 =$ const. de la sphère, qui correspondent aux lignes de courbure planes de la surface, sont des lignes géodésiques, c'est-à-dire des grands cercles. Ces lignes admettent pour trajectoires orthogonales les courbes $\sigma =$ const., ce qui donne la signification géométrique de la fonction $\sigma$.

Le résultat précédent pouvait être prévu géométriquement; car, si un point se déplace sur la surface en décrivant une ligne de courbure plane, le point correspondant de la sphère, dans le mode de représentation que nous avons adopté, décrira évidemment le grand cercle dont le plan est parallèle au plan de la ligne de courbure; c'est en raison de cette propriété que nous nous sommes proposé de déterminer en premier lieu les cosinus $a$, $a'$, $a''$.

Lorsque l'élément linéaire de la sphère prend la forme (34), on

sait (n° 599) que le coefficient de $dv_1^2$ doit être de la forme

$$[\varphi(v_1)e^{i\sigma}+\psi(v_1)e^{-i\sigma}]^2;$$

cette remarque se vérifie bien ici en vertu de l'équation (32), que nous avons signalée d'avance au numéro précédent.

1015. Revenons à la formule (34). Nous savons que $\sigma$, $v_1$ sont les coordonnées curvilignes d'un point de la sphère; $\sigma$ désigne la distance de ce point à une courbe fixe $(\Gamma)$ de cette sphère, distance comptée sur le grand cercle normal à $(\Gamma)$ et passant par le point. Quant à $v_1$, c'est une fonction de l'arc de la courbe $(\Gamma)$, compté à partir d'une origine fixe jusqu'au pied du grand cercle normal. Appelons $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point de $(\Gamma)$, qui sont des fonctions de l'arc de la courbe compté à partir de l'origine choisie. Désignons cet arc par $s$ et appelons $x'$, $x''$, ... les dérivées de $x$, ... par rapport à $s$. Nous aurons

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=1, & xx'+yy'+zz'=0,\\ x'^2+y'^2+z'^2=1, & x'x''+y'y''+z'z''=0.\end{array}\right.$$

Posons, pour abréger,

$$(36)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} x & y & z\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix},$$

nous aurons les formules

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{l} yz''-zy''=-\Delta x',\\ zx''-xz''=-\Delta y',\\ xy''-yx''=-\Delta z',\end{array}\right.$$

dont la démonstration est immédiate.

Exprimons maintenant que le point $(a, a', a'')$ de la sphère est situé à une distance $\sigma$ sur l'arc de grand cercle, qui est normal à la courbe $(\Gamma)$ au point $(x, y, z)$. Nous obtiendrons, par des méthodes tout élémentaires, les formules

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2a=[x-i(yz'-zy')]e^{i\sigma}+[x+i(yz'-zy')]e^{-i\sigma},\\ 2a'=[y-i(zx'-xz')]e^{i\sigma}+[y-i(zx'-xz')]e^{-i\sigma},\\ 2a''=[z-i(xy'-yx')]e^{i\sigma}+[z+i(xy'-yx')]e^{-i\sigma}.\end{array}\right.$$

Il nous reste à exprimer qu'en prenant pour $s$ une fonction con-

venable de $v_1$, ces formules conduisent à l'expression (34) de l'élément linéaire.

Différentions la première; en tenant compte des relations (37), nous trouvons

$$\begin{aligned} 2\,da = x'\,ds[(1+i\Delta)e^{i\sigma}+(1-i\Delta)e^{-i\sigma}] \\ + i\,d\sigma\{[x-i(yz'-zy')]e^{i\sigma}-[x+i(yz'-zy')]e^{-i\sigma}\}. \end{aligned}$$

On déduit de là, en élevant au carré et ajoutant les équations analogues,

$$dS^2 = d\sigma^2 + \left(\frac{1+i\Delta}{2}\frac{ds}{dv_1}e^{i\sigma} + \frac{1-i\Delta}{2}\frac{ds}{dv_1}e^{-i\sigma}\right)^2 dv_1^2.$$

Si l'on compare à l'expression fournie par la formule (34), où l'on a remplacé $\frac{\partial\sigma}{\partial v_1}$ par sa valeur,

$$dS^2 = d\sigma^2 + (\mathrm{VM}e^{i\sigma} + \mathrm{VN}e^{-i\sigma})^2\,dv_1^2,$$

on voit que l'on doit avoir

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} (1+i\Delta)\,ds = 2\mathrm{VM}\,dv_1, \\ (1-i\Delta)\,ds = 2\mathrm{VN}\,dv_1. \end{aligned}\right.$$

Ces équations peuvent servir à un double usage.

Si l'on a choisi arbitrairement V en fonction de $v$, elles nous font connaître $s$ et $\Delta$ en fonction de $v$ et, par conséquent, $\Delta$ en fonction de $s$. Cette relation entre $\Delta$ et $s$ détermine, non la situation, mais la forme de la courbe ($\Gamma$). Au contraire, si l'on a pris ($\Gamma$) arbitrairement ainsi que $k$ et $\omega$, elles nous font connaître V et $v_1$ en fonction de $s$ et, par suite, V, $v_1$ en fonction de $v$. On voit donc que l'on peut choisir arbitrairement la courbe ($\Gamma$). En d'autres termes, *parmi les surfaces que nous étudions, il y en aura toujours pour lesquelles les plans des lignes de courbure du premier système seront parallèles aux plans tangents d'un cône quelconque.*

La détermination de $a$ étant faite, on aura $b$ par l'une des formules (5), qui donne

$$\frac{\partial a}{\partial v} = br_1 = b\frac{\partial h}{\partial u} = b\frac{\partial\sigma}{\partial v_1};$$

et, par conséquent, la différentielle de la coordonnée rectangu-

laire X d'un point de la surface sera

$$dX = e^h \left( a\,du + \frac{\frac{\partial a}{\partial v} dv}{\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}} \right) = e^h \left( a\,du + \frac{\frac{\partial a}{\partial v_1} dv_1}{\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}} \right).$$

En remplaçant $a$ par sa valeur, on trouve

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} dX &= e^h V x' \, dv_1 + [x - i(yz' - zy')] e^{h+i\sigma} d\left(\frac{u + iv_1}{2}\right) \\ &+ [x + i(yz' - zy')] e^{h-i\sigma} d\left(\frac{u - iv_1}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

**1016.** Voici comment on peut effectuer cette quadrature.

L'exponentielle $e^h$, considérée comme une fonction de $\frac{u}{2}$, est doublement périodique de seconde espèce et a les mêmes multiplicateurs que la fonction

$$e^{2x \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} \frac{H(x - 2\omega)}{H(x)}.$$

Si l'on applique la formule donnée par M. Hermite pour la décomposition en éléments simples, on trouvera

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} e^h = {} & \frac{2M\,\theta^2(\omega)}{H(2\omega)H'(0)} \frac{H\left(\frac{u + iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u + iv_1 + \omega}{2}\right)} e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} \\ & + \frac{2N\,\theta^2(\omega)}{H(2\omega)H'(0)} \frac{H\left(\frac{u - iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u - iv_1 + \omega}{2}\right)} e^{(u-iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}, \end{aligned} \right.$$

M et N ayant les valeurs définies par les formules (33).

Si l'on porte cette expression de $e^h$ dans le premier terme seul de la formule (40), puis que l'on remplace

$$2VMx'\,dv_1 \quad \text{par} \quad x'(1 + i\Delta)\,ds = d[x - i(yz' - zy')],$$

$$2VNx'\,dv_1 \quad \text{par} \quad x'(1 - i\Delta)\,ds = d[x + i(yz' - zy')],$$

on obtient

$$dX = \frac{\Theta^2(\omega)}{H(2\omega)\,H'(0)} \frac{H\left(\frac{u+iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} d[x-i(yz'-zy')]$$

$$+[x-i(yz'-zy')] \frac{\Theta^2\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)}{H^2\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} d\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)+\ldots,$$

les termes non écrits se déduisant des précédents par le changement de $i$ en $-i$.

Dans la seconde ligne de la formule précédente figure une fonction que l'on déduit de la suivante :

$$F(x) = \frac{\Theta^2\left(x-\frac{\omega}{2}\right)}{H^2\left(x+\frac{\omega}{2}\right)} e^{2x\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

en y remplaçant $x$ par $\frac{u+iv_1}{2}$. Ici encore $F(x)$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce, et une nouvelle application de la méthode de décomposition de M. Hermite nous donne

$$\frac{\Theta^2\left(x-\frac{\omega}{2}\right)}{H^2\left(x+\frac{\omega}{2}\right)} e^{2x\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} = \frac{\Theta^2(\omega)}{H'(0)\,H(2\omega)} \frac{d}{dx}\left[\frac{H\left(x-\frac{3\omega}{2}\right)}{H\left(x+\frac{\omega}{2}\right)} e^{2x\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\right].$$

En faisant usage de cette formule, nous voyons que les deux premiers termes de $dX$ deviennent la différentielle exacte d'un produit, et l'intégration nous donne

$$(42)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\Theta^2(\omega)[x-i(yz'-zy')]}{H(2\omega)\,H'(0)} \dfrac{H\left(\frac{u+iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} \\[2ex] \quad + \dfrac{\Theta^2(\omega)[x+i(yz'-zy')]}{H(2\omega)\,H'(0)} \dfrac{H\left(\frac{u-iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u-iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}. \end{cases}$$

On aurait pour Y et Z des expressions analogues. La question est donc complètement résolue.

1017. Il nous reste maintenant à donner l'interprétation des formules et la construction géométrique de la surface. En multipliant l'équation (42) par $x'$ et ajoutant les équations analogues, on a

$$x'X + y'Y + z'Z = 0.$$

Les coefficients ne dépendant que de $v$, cette équation représente les plans des lignes de courbure du premier système. Elle ne contient pas de terme constant; par suite, *les plans des lignes de courbure du premier système enveloppent un cône*. C'est là une première propriété de la surface.

Étudions maintenant les lignes de courbure planes. Leurs plans sont normaux à la courbe sphérique que nous avons désignée par $(\Gamma)$. Rapportons la ligne de courbure à deux axes rectangulaires choisis dans son plan, l'un $Ox_1$, allant au point où le plan coupe la courbe $(\Gamma)$ et ayant pour cosinus directeurs $x$, $y$, $z$; l'autre $Oy_1$ perpendiculaire au premier et ayant pour cosinus directeurs

$$yz' - zy', \quad zx' - xz', \quad xy' - yx'.$$

Appelons $x_1$ et $y_1$ les coordonnées relatives à ces axes. On trouvera aisément

$$(43) \qquad x_1 + iy_1 = \frac{2\Theta^2(\omega)}{H(2\omega)H'(0)} \frac{H\left(\dfrac{u+iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\dfrac{u+iv_1+\omega}{2}\right)} e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

Les deux équations obtenues en séparant les parties réelles et les parties imaginaires donneront $x_1, y_1$. On voit donc que *la forme des lignes de courbure planes sera la même pour toutes les surfaces qui correspondent à un même système de valeurs de $k$ et de $\omega$ et sera, au contraire, complètement indépendante de la forme de la fonction arbitraire qui entre dans les formules.* C'est la deuxième propriété géométrique de la surface.

En troisième lieu, cherchons l'arête de contact des plans des lignes de courbure avec le cône que ces plans enveloppent. Cette arête de contact sera définie par l'équation

$$x''X + y''Y + z''Z = 0,$$

à laquelle on donnera facilement la forme

$$(44)\qquad (1+i\Delta)(x_1+iy_1)+(1-i\Delta)(x_1-iy_1)=0.$$

Si l'on tient compte des formules (39), cette équation devient

$$M(x_1+iy_1)+N(x_1-iy_1)=0,$$

ou, en remplaçant M et N par leurs valeurs,

$$(45)\qquad e^{-iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\,\Theta(\omega+iv_1)(x_1+iy_1)=e^{iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\,\Theta(\omega-iv_1)(x_1-iy_1).$$

Remarquons, d'ailleurs, que le point situé à la distance 1 sur l'axe $Oy_1$ décrit la courbe $(\Gamma)$, normale au plan de la ligne de courbure; et, par conséquent, ce plan roule sur le cône qu'il enveloppe. L'équation précédente nous montre que *la droite de contact du plan de la ligne de courbure avec le cône enveloppe ne dépend que des constantes $k$, $\omega$ et nullement de la forme de la fonction arbitraire*. C'est la troisième propriété géométrique de la surface.

En réunissant tous ces résultats, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

*Considérons les coordonnées rectangulaires $x_1$, $y_1$ comme des fonctions des variables $u$, $v_1$ définies par la double équation*

$$(46)\qquad x_1\pm iy_1=\frac{2\Theta^2(\omega)}{H(2\omega)H'(0)}\,\frac{H\left(\dfrac{u\pm iv_1-3\omega}{2}\right)}{H\left(\dfrac{u\pm iv_1+\omega}{2}\right)}\,e^{(u\pm iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

*L'équation*

$$v_1=\text{const.}$$

*définira une famille de courbes planes isothermes. Faisons correspondre à chaque courbe $(v_1)$ la droite définie par l'équation*

$$(47)\qquad e^{-iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\,\Theta(\omega+iv_1)(x_1+iy_1)=e^{iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}\,\Theta(\omega-iv_1)(x_1-iy_1).$$

*Faisons rouler le plan qui contient les courbes sur un cône quelconque ayant pour sommet l'origine des coordonnées. Alors la courbe $(v_1)$, qui, dans chaque position du plan, corres-*

*pond à la génératrice de contact du plan et du cône, engendre précisément la surface cherchée.*

On peut établir, à l'aide de considérations géométriques directes, une partie des résultats précédents; montrer, en particulier, pourquoi la solution obtenue contient une fonction arbitraire et pourquoi cette fonction arbitraire tient si peu de place dans le développement de la solution. Reportons-nous à la génération de toute surface à lignes de courbure planes au moyen de trois développables (D), ($D_1$) et ($\Delta$). Si l'on transforme par flexion la développable (D) en un plan (P), les lignes de courbure constitueront sur ce plan (P) un réseau orthogonal. Soit $v$ le paramètre des lignes de courbure planes, dont la forme n'aura pas changé, et $u$ le paramètre des lignes de seconde courbure. L'élément linéaire du plan sera de la forme

$$ds_1^2 = A^2\, du^2 + C^2\, dv^2,$$

et, d'après la proposition du n° 998, celui de la surface sera déterminé par la formule

$$ds^2 = A^2\, du^2 + C^2(1 + V^2)\, dv^2,$$

où V désigne une fonction de $v$, qui n'est autre que la tangente de l'angle $\varphi$ défini au n° 999. La condition d'isothermie se traduisant par une équation de la forme

$$\frac{A}{C\sqrt{1+V^2}} = \frac{\varphi(u)}{\psi(v)},$$

on voit immédiatement qu'elle est indépendante de la fonction V. Ainsi :

*Lorsqu'une surface à lignes de courbure planes sera isothermique, la même propriété devra appartenir à toutes les surfaces à lignes de courbure planes que l'on en peut dériver par la flexion de la développable* (D).

**1018.** Dans tout ce qui précède, nous avons étudié seulement le cas le plus général. Les calculs se trouveraient en défaut, par exemple, si l'on envisageait ce cas particulier de l'équation de

Lamé pour lequel les deux solutions U, $U_1$, que nous avons supposées distinctes, se réduisent à une seule.

Cette hypothèse, qui conduit, en particulier, aux surfaces à courbure constante d'Enneper, a fait l'objet des études de M. Adam [1]. On déduit les résultats qui s'y rapportent des précédents en supposant que, dans les formules données plus haut, $\omega$ tende vers zéro.

Changeons, en effet, dans les formules (46) et (47), $x_1$ en $x_1 + \frac{\Theta^2(o)}{H'^2(o)}\frac{1}{\omega}$ et faisons tendre $\omega$ vers zéro. En supprimant partout le facteur $\frac{\Theta^2(o)}{H'^2(o)}$ égal à $\frac{1}{k}$, il restera, pour l'équation de la courbe, la double formule

$$(48)\qquad x_1 \pm iy_1 = -2\frac{H'\left(\frac{u \pm iv_1}{2}\right)}{H\left(\frac{u \pm iv_1}{2}\right)} + (u \pm iv_1)\frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)},$$

et, pour celle de la droite,

$$(49)\qquad y_1 = \frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)}v_1 + i\frac{\Theta'(iv_1)}{\Theta(iv_1)}.$$

Par suite, il suffira de faire rouler le plan de la courbe sur un cylindre quelconque de telle manière que la droite précédente soit la génératrice de contact et que chacun de ses points décrive une section droite du cylindre.

Si $k$ devient égal à zéro, on a

$$\Theta'(iv_1) = o, \qquad \Theta''(o) = o, \qquad \frac{H'\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)} = \cot\left(\frac{u+iv_1}{2}\right),$$

les plans des lignes de courbure passent par une droite et ces lignes de courbure sont des cercles.

---

[1] P. Adam, *Sur les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système ou dans les deux systèmes* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X, p. 319; 1893).

# CHAPITRE XI.

## SURFACES A LIGNES DE COURBURE SPHÉRIQUES.

Les surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système correspondent à des équations aux dérivées partielles à invariants égaux qui sont du premier, du second ou du troisième rang. — Méthode directe de recherche. — Étant donnée une surface à lignes de courbure sphériques $(\Sigma)$, il existe une infinité de surfaces $(\Sigma_0)$ de même définition, dépendant d'une fonction arbitraire et admettant la même représentation sphérique. — Théorème de M. Blutel. — Construction géométrique des surfaces $(\Sigma_0)$. — Comment on peut, sans aucune intégration, déduire toutes les surfaces à lignes de courbure sphériques des surfaces à lignes de courbure planes. — Propriétés diverses : en appliquant des inversions convenablement choisies à chaque ligne de courbure sphérique de la surface, on peut les placer toutes sur une même développable isotrope. — Définition de la rotation autour d'un cercle; proposition qui rapproche les surfaces à lignes de courbure sphériques des surfaces à lignes de courbure planes. — Des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques. — Leur détermination se ramène à la solution de l'équation fonctionnelle

$$\sum_1^6 (A_i + B_i)^2 = 0.$$

— Résultat : toutes les surfaces cherchées dérivent simplement, soit du cône, soit de la surface dont les normales sont tangentes à un cône.

---

**1019.** Si nous poursuivions l'application de la méthode développée dans le Chapitre VIII de ce Livre, nous obtiendrions une suite illimitée de surfaces, déterminées sans aucun signe de quadrature, et pour lesquelles on saurait résoudre d'une manière complète le problème de la représentation sphérique. Les surfaces à lignes de courbure planes correspondent, nous l'avons vu (n° 996), à des équations aux dérivées partielles du premier ou du second rang. Nous allons terminer cette étude en montrant de même que les surfaces à lignes de courbure sphériques correspondent à des équations aux dérivées partielles du premier, du deuxième ou du troisième rang.

Nous commencerons par la remarque suivante :

*Lorsqu'une ligne de courbure est sphérique, la développable circonscrite à la surface suivant cette ligne de courbure doit aussi être circonscrite à une sphère; et,* réciproquement, *si cette développable est circonscrite à une sphère, la ligne de courbure est sphérique.*

En effet, d'après le théorème de Joachimsthal, tous les plans tangents aux divers points d'une ligne de courbure située sur une sphère (S) coupent cette sphère sous un angle constant et, par suite, sont tangents à une sphère (S′) concentrique à (S). Inversement, si tous les plans tangents en tous les points d'une ligne de courbure (C) sont tangents à une sphère, soit (C′) la courbe de contact : on connaîtra deux lignes de courbure, (C) et (C′), de la développable enveloppée par ces plans tangents; et comme (C′) est sur une sphère, (C) sera sur une autre sphère concentrique à la précédente [1].

**1020.** Appliquons cette remarque à la détermination de toutes les surfaces pour lesquelles les lignes de courbure de l'un des systèmes, que nous appellerons dans la suite les lignes *de première courbure,* sont toutes sphériques. Il suffira évidemment d'exprimer qu'en chaque point d'une telle ligne le plan tangent à la surface est circonscrit à une sphère, qui variera d'ailleurs lorsqu'on changera de ligne de courbure.

Soit toujours $x$ le paramètre des lignes de première courbure. Le plan tangent à la surface cherchée, défini par l'équation

$$(\alpha + \beta)X + i(\beta - \alpha)Y + (\alpha\beta - 1)Z + \xi = 0, \tag{1}$$

devra, en tous les points d'une ligne de courbure, être tangent à une sphère (S′). Soient $x'_0$, $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ les coordonnées carté-

---

[1] A propos du théorème de Joachimsthal, nous signalerons la réciproque suivante dont le lecteur trouvera la démonstration :

*Si les sphères assujetties à contenir trois points consécutifs d'une ligne de courbure et, de plus, à être tangentes à la surface au point où elles touchent la ligne de courbure coupent toutes une sphère* (S) *sous un angle constant, la ligne de courbure est sphérique et située sur la sphère* (S).

siennes du centre et le rayon de (S′). Ce sont quatre fonctions de $x$ que nous supposerons données. En traduisant analytiquement la propriété qui nous sert de définition, on aura

$$(\alpha+\beta)x'_0+i(\beta-\alpha)x'_1+(\alpha\beta-1)x'_2+\xi=x'_3(\alpha\beta+1).$$

Changeant un peu les notations, nous écrirons cette condition comme il suit

$$(2)\qquad \alpha\beta x_0+\alpha x_1+\beta x_2+x_3+\xi=0,$$

$x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ étant toujours des fonctions de $x$.

Différentions par rapport à $y$ : en remplaçant $\frac{\partial\beta}{\partial y}$ par sa valeur déduite des équations (7) [p. 199], $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$ sera en facteur, et il viendra, $p$ et $q$ désignant $\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\xi}{\partial\beta}$,

$$(3)\qquad \beta x_0+x_1+p=\omega^2(\alpha x_0+x_2+q).$$

Différentions encore par rapport à $y$ et remplaçons $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial\beta}{\partial y}$ par leurs valeurs (7) [p. 199]. Il viendra, en supprimant le facteur $2\omega$,

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}(\alpha x_0+x_2+q)+\omega\left(x_0\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial y}\right)=0.$$

Cette équation s'intègre à vue et nous donne

$$(4)\qquad x_0\alpha\omega+x_2\omega+q\omega=x_4,$$

$x_4$ désignant une nouvelle fonction de $x$. La relation précédente s'obtiendrait aussi en exprimant que la ligne de courbure est sur une sphère concentrique à (S′).

**1021.** Si nous remarquons que $\omega$, $q\omega$ et $\alpha\omega$ sont trois solutions particulières d'une même équation à invariants égaux, nous voyons que l'on retrouve ici, sous une forme un peu plus générale, un problème déjà rencontré pour les lignes de courbure planes et dont nous allons dire quelques mots.

Lorsque, pour une équation à invariants égaux, la suite de Laplace se termine, l'équation admet une solution de la forme suivante

$$z=AX+A_1X'+\ldots+X^{(i)};$$

de sorte que, si l'on prend $i+1$ solutions $z_1, z_2, \ldots, z_{i+1}$, correspondantes aux déterminations $X_1, \ldots, X_{i+1}$ de $X$, elles vérifient identiquement la relation linéaire

$$\begin{vmatrix} z_1 - X_1^{(i)} & X_1 & X'_1 & \ldots & X_1^{(i-1)} \\ z_2 - X_2^{(i)} & X_2 & X'_2 & \ldots & X_2^{(i-1)} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ z_{i+1} - X_{i+1}^{(i)} & X_{i+1} & X'_{i+1} & \ldots & X_{i+1}^{(i-1)} \end{vmatrix} = 0,$$

dont les coefficients sont fonctions de la seule variable $x$. Mais, réciproquement, si l'on a une relation de cette forme entre des solutions particulières au nombre de $i+1$, peut-on en conclure que l'équation sera intégrable et de rang au plus égal à $i+1$? C'est la question que nous allons examiner pour le cas où $i$ est égal à 2.

Suivons la même marche que pour les surfaces à lignes de courbure planes. Pour plus de netteté, posons

$$(5) \qquad \alpha\omega = z_1, \qquad q\,\omega = z_2;$$

la relation (4) prendra la forme

$$(6) \qquad z_2 = x_4 - x_2\,\omega - x_0\,z_1.$$

Soit

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = kz$$

l'équation dont $\omega$, $z_1$, $z_2$ sont trois solutions particulières. Si l'on y substitue la valeur précédente de $z_2$, on trouvera, en supposant, comme il est permis, $x'_0$ différent de zéro,

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} = -k\frac{x_4}{x'_0} - \frac{x'_2}{x'_0}\frac{\partial\omega}{\partial y},$$

ou, plus simplement,

$$(8) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial y} = kx_5 + x_6\frac{\partial\omega}{\partial y},$$

$x_5$ et $x_6$ désignant de nouvelles fonctions de $x$. Différentions par rapport à $x$, et remplaçons les dérivées secondes de $z_1$ et de $\omega$ par leurs valeurs déduites de l'équation (7), dont elles sont des solu-

tions particulières. Il viendra

$$kz_1 = \frac{\partial k}{\partial x}x_5 + kx'_5 + kx_6\omega + x'_6\frac{\partial \omega}{\partial y},$$

ou, en supposant $k$ différent de zéro,

$$(9)\qquad z_1 = x_5\frac{\partial \log k}{\partial x} + x'_5 + x_6\omega + x'_6\frac{1}{k}\frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Pour éliminer $z_1$ substituons la valeur précédente dans l'équation (8). En posant

$$(10)\qquad k_1 = k - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x\,\partial y}, \qquad (11)\qquad \frac{x_5}{x'_6} = x_7,$$

on trouvera

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = k_1 x_7;$$

et cette condition contient l'unique solution particulière $\omega$.

Pour l'éliminer enfin, différentions les deux membres par rapport à $x$. Nous aurons

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\omega - \frac{1}{k}\frac{\partial \log k}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = k_1 x'_7 + x_7\frac{\partial k_1}{\partial x},$$

ou encore

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{1}{k}\frac{\partial^2 \log k}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \log k}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = k_1 x'_7 + x_7\frac{\partial k_1}{\partial x}.$$

En tenant compte des formules (10) et (12) et supposant $k_1$ différent de zéro, il vient

$$(13)\qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = kx'_7 + kx_7\frac{\partial \log kk_1}{\partial x}.$$

Il ne reste plus qu'à substituer cette valeur de $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ dans l'équation (12) pour obtenir la relation

$$(14)\qquad k_1 - \frac{\partial^2 \log kk_1}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

qui constitue une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre à laquelle devra satisfaire la fonction $k$. Mais, si l'on se reporte aux formules qui relient les invariants dans une suite de Laplace (n° 331), on reconnaît immédiatement que l'équation (14)

est la condition nécessaire et suffisante pour que la solution générale de l'équation (7) soit de rang égal à *trois*.

Comme, dans la suite des calculs, nous avons écarté l'hypothèse où l'une ou l'autre des fonctions $k$, $k_1$ serait nulle, on voit bien que toutes les surfaces à lignes de courbure sphériques seront fournies par les équations aux dérivées partielles des trois premiers rangs. Mais comme, pour l'équation du premier rang, les lignes de courbure des surfaces correspondantes sont toutes planes, elles ne pourront être sphériques sans être circulaires.

En différentiant l'équation (13) par rapport à $x$, on trouve

$$(15) \qquad \omega = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{k_1}\frac{\partial}{\partial x}(kk_1x_7)\right];$$

et il est clair, par suite de la symétrie de la relation (6), qui nous a servi de point de départ, relativement aux trois solutions particulières $z_1$, $z_2$ et $\omega$, que $\alpha\omega$ et $q\omega$ seront définis par des formules toutes semblables à la précédente, mais où $x_7$ devra être remplacé par d'autres fonctions, d'ailleurs arbitraires, de $x$.

En développant les calculs, on trouvera

$$(16) \qquad \omega = x_7'' + x_7'\frac{\partial}{\partial x}\log k^2k_1 + \frac{1}{k}x_7\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \log kk_1}{\partial x}\right).$$

C'est la partie de la solution générale qui contient une fonction arbitraire de $x$; l'autre s'obtiendrait en changeant $x$ en $y$ et remplaçant la fonction arbitraire de $x$ par une fonction arbitraire de $y$.

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour poursuivre la recherche. En continuant et étendant jusqu'au troisième rang les calculs qui terminent le Chapitre VIII de ce Livre, nous obtiendrons, sans aucun signe de quadrature, les équations qui définissent les surfaces cherchées. Nous avons même donné au n° 994 les éléments nécessaires pour écrire immédiatement la valeur de $\omega$. Mais ici encore, au lieu de poursuivre la solution analytique, nous préférons revenir à la Géométrie en nous appuyant sur un théorème dû à M. Blutel [1].

---

[1] E. Blutel, *Sur les surfaces qui admettent un système de lignes de courbure sphériques et qui ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure* (*Comptes rendus*, t. CXVI, p. 249; 1893).

**1022.** Étant donnée une surface $(\Sigma)$ à lignes de courbure sphériques dans un système, nous allons montrer tout d'abord qu'il existe une infinité de surfaces de même définition, et admettant par surcroît la même représentation sphérique que $(\Sigma)$.

Désignons, en effet, par $a$, $b$, $c$, $r$, $h$ des fonctions du paramètre $\alpha$ des lignes de première courbure de $(\Sigma)$, par $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point de $(\Sigma)$, par $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ les cosinus directeurs de la normale en ce point. D'après le théorème de Joachimsthal, on aura les deux équations

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2, \tag{17}$$
$$\gamma(x-a)+\gamma'(y-b)+\gamma''(x-c)=hr, \tag{18}$$

dont la première exprime que la ligne de courbure de la surface se trouve sur une sphère (S) de centre $(a, b, c)$ et de rayon $r$; la seconde exprime, conformément au théorème de Joachimsthal, que le plan tangent à la surface en chaque point de la ligne de courbure coupe la sphère (S) sous un angle constant, dont le cosinus est $h$. Si l'on pouvait éliminer le paramètre $\alpha$ entre ces deux équations, on serait conduit à une équation aux dérivées partielles propre à définir toutes les surfaces $(\Sigma)$. On peut traiter cette équation par les procédés réguliers; nous nous bornerons ici à remarquer que ses *caractéristiques* sont les lignes de courbure du second système.

En effet, pour déterminer toutes les surfaces vérifiant l'équation et passant par un point M de l'espace, il faut d'abord exprimer que la sphère (S), définie par l'équation (17), passe par ce point; et cette condition fait connaître une ou plusieurs valeurs de $\alpha$. Prenons une des sphères (S) qui passent en M : les plans tangents aux surfaces correspondantes, devant couper cette sphère sous un angle constant, envelopperont un cône de révolution dont l'axe sera le rayon de (S) qui passe au point M. Or les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles, étant par définition les courbes tangentes aux génératrices rectilignes de ce cône, auront évidemment mêmes tangentes en M que les lignes de seconde courbure, et, par suite, se confondront avec ces lignes, puisque le raisonnement s'applique à tout point de chaque surface $(\Sigma)$.

**1023.** S'il existe une surface $(\Sigma_0)$ de même définition que $(\Sigma)$ et

admettant la même représentation sphérique, $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ auront les mêmes valeurs aux points correspondants des deux surfaces. La surface $(\Sigma)$ sera donc définie par des équations telles que les suivantes

$$(x_0 - a_0)^2 + (y_0 - b_0)^2 + (z_0 - c_0)^2 = r_0^2, \tag{19}$$

$$\gamma(x_0 - a_0) + \gamma'(y_0 - b_0) + \gamma''(z_0 - c_0) = r_0 h_0, \tag{20}$$

où $x_0$, $y_0$, $z_0$ désignent les coordonnées du point de la surface et où $a_0$, $b_0$, $c_0$, $r_0$, $h_0$ sont des fonctions de $\alpha$ comme $a$, $b$, $c$, $r$, $h$. La première équation représente la sphère $(S_0)$ qui contient la ligne de première courbure de $(\Sigma_0)$; et la seconde exprime que le plan tangent coupe $(S_0)$ sous un angle de cosinus $h_0$. Si nous désignons par C, $C_0$ les centres des deux sphères (S), $(S_0)$; par M, $M_0$ deux points correspondants des surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_0)$, pris respectivement sur les sphères (S), $(S_0)$, il est clair que les normales, parallèles, en ces deux points et les deux rayons CM, $C_0M_0$ sont parallèles à un même plan, à celui qui est normal en M, par exemple, à la ligne de courbure sphérique de $(\Sigma)$. En traduisant analytiquement cette propriété, on obtiendra les relations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} x_0 - a_0 &= \lambda(x - a) + \mu\gamma, \\ y_0 - b_0 &= \lambda(y - b) + \mu\gamma', \\ z_0 - c_0 &= \lambda(z - c) + \mu\gamma'', \end{aligned}\right. \tag{21}$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont deux fonctions auxiliaires que l'on déterminera en substituant dans les équations (19) et (20) les valeurs précédentes de $x_0 - a_0$, $y_0 - b_0$, $z_0 - c_0$.

On a ainsi les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} \lambda^2 r^2 + 2\lambda\mu r h + \mu^2 &= r_0^2, \\ \lambda h r + \mu &= h_0 r_0, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

d'où l'on déduit

$$\left\{\begin{aligned} \lambda r\sqrt{1 - h^2} &= r_0\sqrt{1 - h_0^2}, \\ \mu &= h_0 r_0 - \lambda h r \end{aligned}\right. \tag{23}$$

et qui font connaître $\lambda$ et $\mu$ *comme des fonctions de* $\alpha$.

Il reste à exprimer la condition essentielle que l'on a identiquement

$$\gamma\, dx_0 + \gamma'\, dy_0 + \gamma''\, dz_0 = 0.$$

Si l'on substitue les valeurs des différentielles $dx_0$, $dy_0$, $dz_0$ déduites des équations (21), en tenant compte de la relation

$$\gamma\, dx + \gamma'\, dy + \gamma''\, dz = 0,$$

il vient

$$rh\, d\lambda + d\mu + \gamma(da_0 - \lambda\, da) + \gamma'(db_0 - \lambda\, db) + \gamma''(dc_0 - \lambda\, dc) = 0.$$

Si les coefficients de $\gamma, \gamma', \gamma''$ n'étaient pas nuls identiquement, on aurait, en tous les points de la ligne de courbure sphérique, une relation linéaire entre ces cosinus; et, par suite, cette ligne de courbure, ayant pour représentation sphérique un petit cercle, serait elle-même un cercle. Écartons d'abord ce cas exceptionnel : il faudra que nous ayons

$$rh\, d\lambda + d\mu = 0, \tag{24}$$

$$\frac{da_0}{da} = \frac{db_0}{db} = \frac{dc_0}{dc} = \lambda. \tag{25}$$

Mais je dis que ces relations conviennent aussi au cas des lignes de courbure circulaires, pourvu que l'on choisisse convenablement la sphère $(S_0)$ parmi toutes celles, en nombre infini, qui passent par la ligne de courbure circulaire de $(\Sigma_0)$. Car soit alors

$$H\gamma + H'\gamma' + H''\gamma'' + K = 0,$$

la relation linéaire entre les cosinus directeurs, relation nécessairement *unique*. Supposons $H \gtrless 0$. Si l'on choisit $(S_0)$ de telle manière que l'on ait

$$da_0 = \lambda\, da,$$

comme il ne peut y avoir aucune relation linéaire entre $\gamma', \gamma''$, cette unique équation entraînera les autres relations contenues dans les formules (24) et (25).

**1024.** Ce point étant admis, il faut interpréter les équations (24) et (25) qui définissent toutes les surfaces $(\Sigma_0)$. Voici le théorème de M. Blutel.

Désignons par (K) et $(K_0)$ deux lignes de courbure correspondantes de $(\Sigma)$ et de $(\Sigma_0)$. Ces lignes de courbure ne sont pas généralement homothétiques; mais *les développables* (D), $(D_0)$ *formées par les normales en tous leurs points le sont toujours.*

*Les courbes* $(C)$ et $(C_0)$, *décrites par les centres* $C$ *et* $C_0$ *des deux sphères* $(S)$ *et* $(S_0)$, *ont leurs tangentes correspondantes toujours parallèles; par suite la droite* $CC_0$ *engendre une développable et touche l'arête de rebroussement* $(R)$ *de cette développable en un certain point* $O$. *Ce point* $O$ *est le centre d'homothétie des deux développables* $(D)$, $(D_0)$. *L'homologue du point* $C$ *dans cette homothétie est le point* $C_0$; *et le rapport de similitude est égal au rapport des distances de ces points* $C_0$, $C$ *aux deux plans principaux qui contiennent respectivement la tangente à la ligne de première courbure de* $(\Sigma_0)$ *et la tangente correspondante de* $(\Sigma)$.

Dans cette proposition, il y a des points qui sont évidents *a priori;* il y en a d'autres que l'on pourrait démontrer par la Géométrie, mais qui résultent immédiatement des relations précédentes. Les équations (25), par exemple, montrent immédiatement que les deux courbes $(C)$, $(C_0)$ ont leurs tangentes toujours parallèles et que $\lambda$ est le rapport des distances $OC_0$ et $OC$ des points $C_0$, $C$ au point de contact de la droite $CC_0$ avec la courbe qu'elle enveloppe nécessairement. Il est évident, au contraire, sans calcul que les développables $(D)$, $(D_0)$ sont homothétiques; car : 1° elles ont leurs plans tangents parallèles; 2° les plans de la première, coupant la sphère $(S)$ sous un angle constant de cosinus égal à $h$, sont tous tangents à la sphère $(S')$ concentrique à $(S)$ et de rayon $r\sqrt{1-h^2}$; 3° pour la même raison, les plans de la seconde sont tangents à une sphère $(S'_0)$ concentrique à $(S_0)$ et de rayon $r_0\sqrt{1-h_0^2}$. Or deux développables dont les plans tangents sont parallèles sont évidemment homothétiques dès qu'elles sont assujetties en outre à être circonscrites respectivement à deux sphères $(S')$ et $(S'_0)$. On passe de l'une à l'autre par l'homothétie qui transforme $(S')$ en $(S'_0)$; de sorte que le centre d'homothétie est sur la ligne des centres $CC_0$ et que le rapport de similitude est égal au rapport des rayons des deux sphères. Or, d'après la première formule (23), ce rapport est égal à $\lambda$ : le centre d'homothétie est, par suite, le point $O$. La proposition de M. Blutel se trouve ainsi complètement établie.

On verrait de même que les développables $(D'')$, $(D''_0)$ circonscrites aux deux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_0)$ en tous les points des lignes de courbure $(K)$, $(K_0)$ sont homothétiques, car elles sont circon-

scrites à des sphères ($S''$) et ($S''_0$), de rayons $rh$ et $r_0 h_0$, concentriques respectivement à (S) et à ($S_0$). Mais ni le rapport, ni le centre d'homothétie, ne sont les mêmes que pour les développables (D), ($D_0$). Toutefois ce complément donné à la proposition de M. Blutel est essentiel pour la suite de la recherche.

**1025.** Il nous faut maintenant indiquer comment, à l'aide des propositions précédentes, on pourra déterminer toutes les surfaces ($\Sigma_0$) lorsque la surface ($\Sigma$) sera donnée. On aura sept fonctions inconnues $a_0$, $b_0$, $c_0$, $r_0$, $h_0$, $\lambda$, $\mu$ et seulement les six équations (23), (24) et (25); une des fonctions pourra donc être choisie arbitrairement. Si c'est $\lambda$ par exemple, que l'on supposera exprimée en $\alpha$, les équations (24), (25) fourniront $a_0$, $b_0$, $c_0$, $\mu$ par des quadratures et les deux équations (23) détermineront ensuite $r_0$, $h_0$ en fonction algébrique de $r$ et de $h$. Du reste ces valeurs de $r_0$, $h_0$ ressortent immédiatement des formules précédentes (22). Comme on peut ajouter à toutes ces relations la suivante

$$d(h_0 r_0) = \lambda\, d(hr), \tag{26}$$

obtenue en différentiant la seconde équation (23) et tenant compte de la relation (24), on reconnaît que $h_0$ ne pourra être égal à zéro tant que $h$ ne sera pas aussi égal à zéro. En tenant compte aussi de la première équation (23), on peut dire que *$h$ et $h_0$ prennent en même temps les valeurs* 0 *et* 1.

Par suite, toutes les fois que ($\Sigma$) et ($\Sigma_0$) auront leurs lignes de courbure circulaires, tous les théorèmes précédents leur sont applicables soit que l'on prenne comme sphères (S) et ($S_0$) associées dans les énoncés précédents, les deux sphères *inscrites* ou les deux sphères *orthogonales* aux deux surfaces. Ainsi se trouvent justifiées les propositions dont nous avons fait usage plus haut au n° 1006.

**1026.** Pour que la solution précédente puisse fournir sans aucun signe de quadrature la surface ($\Sigma_0$), il faudrait pouvoir résoudre sans aucun signe de quadrature les équations suivantes

$$\frac{da_0}{da} = \frac{db_0}{db} = \frac{dc_0}{dc} = \frac{d(r_0 h_0)}{d(rh)} = \lambda, \tag{27}$$

après quoi $\mu$ et $r_0$ se détermineraient sans difficulté par les for mules (23).

Le problème auquel on se trouve ainsi conduit peut être résol de la manière suivante :

Déterminons les rapports mutuels de quatre fonctions A, B, C, ] de $\alpha$ par les relations suivantes

$$(28)\quad \begin{cases} A\ da + B\ db + C\ dc + H\ d(rh) = 0, \\ A\ d^2 a + B\ d^2 b + C\ d^2 c + H\ d^2(rh) = 0, \\ A\ d^3 a + B\ d^3 b + C\ d^3 c + H\ d^3(rh) = 0. \end{cases}$$

La différentiation de ces relations nous conduira aux suivantes

$$dA\ da + dB\ db + dC\ dc + dH\ d(rh) = 0,$$
$$d^2A\ da + d^2B\ db + d^2C\ dc + d^2H\ d(rh) = 0,$$

où l'on peut remplacer, de même que dans la première (28), $d$ $db$, $dc$, $d(rh)$ par les quantités proportionnelles $da_0$, $db_0$, $dc$ $d(r_0 h_0)$, de sorte que l'on aura nécessairement

$$(29)\quad \begin{cases} A\ da_0 + B\ db_0 + C\ dc_0 + H\ d(r_0 h_0) = 0, \\ dA\ da_0 + dB\ db_0 + dC\ dc_0 + dH\ d(r_0 h_0) = 0, \\ d^2A\ da_0 + d^2B\ db_0 + d^2C\ dc_0 + d^2H\ d(r_0 h_0) = 0. \end{cases}$$

Prenons maintenant comme inconnue auxiliaire $u$ la fonctio

$$(30)\quad u = A a_0 + B b_0 + C c_0 + H r_0 h_0.$$

En différentiant les deux membres de cette relation et tenai compte des formules (29), il viendra

$$(31)\quad \begin{cases} du = a_0\ dA + b_0\ dB + c_0\ dC + r_0 h_0\ dH, \\ d^2 u = a_0\ d^2A + b_0\ d^2B + c_0\ d^2C + r_0 h_0\ d^2H, \\ d^3 u = a_0\ d^3A + b_0\ d^3B + c_0\ d^3C + r_0 h_0\ d^3H, \end{cases}$$

de sorte que $a_0$, $b_0$, $c_0$, $r_0 h_0$ seront déterminées par ces tro équations et s'exprimeront linéairement au moyen de la fonctic arbitraire $u$ et de ses trois premières dérivées.

La question proposée se trouve ainsi complètement résolue. O peut remarquer que $\lambda$ sera une fonction linéaire de $u$ et de s quatre premières dérivées; et comme $\lambda\, da$, $\lambda\, db$, $\lambda\, dc$, $\lambda\, d(r$ sont des différentielles exactes, $\lambda$ sera *l'adjointe* de l'expressic

linéaire qui, égalée à zéro, donnerait une équation différentielle admettant les solutions particulières $a'$, $b'$, $c'$, $(rh)'$.

**1027.** Au lieu des calculs précédents on peut indiquer une construction géométrique déterminant la surface $(\Sigma_0)$. Il suffit de remarquer que les formules (23), (24) et (25) ne cessent pas de subsister si l'on y remplace *d'abord* $h$ et $h_0$ par 1, puis $r$, $r_0$ par $rh$, $r_0 h_0$. Cela revient à dire que *les surfaces à lignes de courbure circulaires* $(\Sigma'')$, $(\Sigma''_0)$ *enveloppées respectivement par les sphères* $(S'')$, $(S''_0)$ *ont même représentation sphérique*. D'après cela, la construction donnée plus haut (n° 1007) et indiquée par M. Rouquet pour déduire de toute surface à lignes de courbure circulaires une surface de même définition admettant même représentation sphérique nous permettra de construire la sphère $(S''_0)$ et, par suite, la courbe $(C_0)$. Cette courbe une fois connue, on pourra construire le point O, la sphère $(S'_0)$, les développables $(D_0)$, $(D''_0)$ qui se couperont suivant la ligne de courbure $(K_0)$. Du reste, le carré du rayon de $(S_0)$ est la somme des carrés des rayons de $(S'_0)$ et de $(S''_0)$.

**1028.** Revenons à la solution analytique. Nous avons vu que la surface $(\Sigma_0)$ dépend d'une fonction arbitraire. On peut disposer de cette fonction arbitraire de telle façon que la surface remplisse certaines conditions données à l'avance, par exemple que toutes les sphères $(S_0)$ soient orthogonales à une sphère fixe ou passent par un point fixe. Ces deux conditions se traduisent, avec des axes convenables, par une équation de la forme suivante

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 - r_0^2 = \text{const.};$$

et, si l'on y substitue les valeurs de $a_0$, $b_0$, $c_0$, $r_0$ en fonction de $u$, on obtiendra une équation différentielle du 4$^e$ ordre à laquelle devra satisfaire cette fonction. Cette équation est quadratique; mais, en la différentiant, on fera apparaître le facteur $\lambda$ que l'on devra supprimer; et il restera une équation linéaire du 5$^e$ ordre. Cela se voit tout de suite si on l'écrit sous la forme

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 - (r_0 h_0)^2 - \lambda^2 r^2 (1 - h^2) = \text{const.}$$

Car en différentiant il viendra

$$\lambda\,[a_0\,da + b_0\,db + c_0\,dc - r_0 h_0\, d(rh)] - \lambda r\sqrt{1-h^2}\, d(\lambda r\sqrt{1-h^2}) =$$

Ainsi, parmi les surfaces $(\Sigma_0)$, il en existe toujours un nomb illimité pour lesquelles les sphères $(S_0)$ passent par un point fi ou sont orthogonales à une sphère fixe.

Or, toute surface $(\Sigma)$ pour laquelle les sphères $(S)$ passent p un point fixe est l'inverse par rapport à ce point d'une surface (' à lignes de courbure planes. Donc *on pourra toujours, par a constructions géométriques qui n'exigent aucune intégratio faire dériver toutes les surfaces à lignes de courbure sph riques des surfaces à lignes de courbure planes : 1° en prena les inverses de celles-ci ; 2° en construisant ensuite les surfa à lignes de courbure sphériques de même représentation sp rique que ces inverses.*

**1029.** De cette génération des surfaces à lignes de courb sphériques résultent plusieurs propriétés que nous allons diquer.

Remarquons que, pour deux surfaces $(\Sigma)$, $(\Sigma_0)$ ayant même r présentation sphérique et pour deux lignes de courbure phériq correspondantes $(K)$, $(K_0)$, les cônes enveloppes des plans n maux ont leurs plans tangents parallèles et, par suite, sont *hom thétiques*. Les développées isotropes des lignes $(K)$, $(K_0)$, dé loppées qui sont tracées sur ces cônes, ont leurs tangen parallèles, et sont, par suite, des courbes homothétiques (b que leur rapport d'homothétie ne soit pas en général égal à $\lambda$). nous supposons que, pour la surface $(\Sigma_0)$, toutes les sphères (S passent par un point fixe, cette surface sera l'inverse d'une s face (T) à lignes de courbure planes, et les développées isotro de ses lignes de courbure $(K_0)$ seront les *inverses* des développ isotropes des lignes de courbure planes de (T). C'est, en ef une propriété essentielle, signalée depuis longtemps ([1]), des veloppables et par suite des développées isotropes, de se conser par l'inversion. Comme les développées isotropes des lignes

([1]) *Voir* la première Partie de l'Ouvrage cité plus haut [III, p. 479].

courbure planes de (T) sont égales, nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

*Étant donnée une surface à lignes de courbure sphériques* ($\Sigma$), *toutes les développées isotropes de ses lignes de courbure sphériques peuvent, par des inversions convenables appliquées à chacune d'elles, se transformer en des courbes identiques.*

En d'autres termes, *en soumettant les lignes de courbure* (K) *à des inversions convenables et variant de l'une à l'autre ligne, on peut les placer toutes sur une même développable isotrope* ($\Delta$).

*Si donc une des lignes de courbure sphériques est algébrique, toutes les autres sont nécessairement algébriques.*

**1030.** Les remarques que nous venons de signaler rapprochent évidemment les surfaces à lignes de courbure sphériques des surfaces à lignes de courbure planes; et l'on est conduit ainsi à rechercher s'il n'existerait pas, pour les lignes de courbure sphériques, une proposition analogue au théorème du n° **1000**. Cette proposition existe effectivement, mais son énoncé demande quelques explications préliminaires.

Considérons, d'une manière générale, deux inversions, définies par les deux sphères principales (S) et ($S_0$). L'effet de ces deux inversions ne sera pas changé ([1]), si l'on substitue à ces deux sphères (S), ($S_0$) deux autres sphères passant par leur cercle d'intersection (C) et se coupant sous le même angle $\alpha$ que les deux premières. On peut donc dire que l'effet des deux inversions est défini si l'on donne le cercle (C) et l'angle $\alpha$. Ajoutons que, pour choisir les deux sphères principales des deux inversions successives dans l'ordre convenable, il faut indiquer aussi un sens déterminé sur le cercle (C). Nous appellerons l'effet de ces deux inversions une *rotation d'angle $\alpha$ autour du cercle* (C). Tandis qu'une inversion simple imprime toujours des déplacements finis aux points de l'espace qui ne sont pas voisins de la sphère prin-

([1]) *Voir*, en particulier, la Note VI de l'Ouvrage cité à la page précédente.

cipale, une *rotation autour d'un cercle* peut imprimer des déplacements infiniment petits à tous les points de l'espace, pourvu que son angle soit infiniment petit.

Si l'on soumet la figure et sa transformée à une inversion dont le pôle se trouve sur le cercle (C), la rotation autour de ce cercle se transforme en une rotation *du même angle* autour de la droite transformée du cercle.

**1031.** Si l'on admet cette généralisation de la notion de rotation, il est clair qu'on peut soumettre toute surface à lignes de courbure circulaires ($\Sigma$) à une déformation analogue à cette déformation particulière d'une développable dans laquelle les génératrices rectilignes restent rectilignes. Faisons correspondre aux cercles de la surface les génératrices rectilignes d'une développable; aux rotations infiniment petites autour de ces génératrices rectilignes, des rotations d'angle égal autour des cercles correspondants. A toute flexion de la développable correspondra une flexion *isomorphe* de la surface ($\Sigma$), comportant dans sa définition une fonction arbitraire.

Cette notion admise, le lecteur démontrera aisément le théorème suivant :

*Pour obtenir la surface à lignes de courbure sphériques la plus générale on coupe une développable isotrope* ($\Delta$) *par une famille de sphères* (S); *on soumet ensuite ces sphères et leur surface enveloppe* ($\Sigma$) *à la flexion qui vient d'être définie. Les sections de la développable* ($\Delta$) *par les sphères* (S) *se transforment ainsi dans une famille de courbes engendrant la surface cherchée.*

Les surfaces qui coupent à angle droit une famille de sphères (S) apparaissent ainsi comme les analogues des surfaces moulures de Monge. Pour elles, les lignes de courbure sont les transformées par des inversions d'une même courbe, d'ailleurs quelconque.

La proposition précédente permet évidemment de retrouver les propositions que nous avons obtenues plus haut (n° 1029).

**1032.** Nous terminerons ce Chapitre en donnant la démonstration d'une proposition déjà énoncée au n° 483, et en déterminant

toutes les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques dans les deux systèmes. Nous commencerons par établir un lemme relatif à deux équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. Soient, avec les notations habituelles,

$$(32) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, p, q) = 0, \\ f_1(x, y, z, p, q) = 0 \end{cases}$$

ces deux équations. Si l'on veut qu'elles admettent une solution commune *avec une constante arbitraire*, il faudra, comme on sait, que la relation

$$(33) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial f_1}{\partial p} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial f_1}{\partial q} \\ -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + p\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} - \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + q\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q} = 0 \end{cases}$$

se vérifie identiquement ou soit une conséquence des proposées. La première équation aux dérivées partielles (32) a ses caractéristiques définies par les équations différentielles

$$(34) \qquad \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial q}} = -\frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}};$$

de même, pour la seconde, les caractéristiques sont définies par le système suivant

$$(35) \qquad \frac{\delta x}{\frac{\partial f_1}{\partial p}} = \frac{\delta y}{\frac{\partial f_1}{\partial q}} = -\frac{\delta p}{\frac{\partial f_1}{\partial x} + p\frac{\partial f_1}{\partial z}} = -\frac{\delta q}{\frac{\partial f_1}{\partial y} + q\frac{\partial f_1}{\partial z}},$$

de sorte que la condition d'intégrabilité (33) se ramène à la relation

$$(36) \qquad dp\,\delta x - \delta p\,dx + dq\,\delta y - \delta q\,dy = 0,$$

qui doit avoir lieu, bien évidemment, pour deux directions quelconques, en chaque point d'une surface intégrale. Or, supposons que les caractéristiques soient les lignes de première courbure pour la première équation, et les lignes de seconde courbure pour la seconde. On aura alors

$$(37) \qquad \frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz} = \lambda, \qquad \frac{\delta p}{\delta x + p\,\delta z} = \frac{\delta q}{\delta y + q\,\delta z} = \mu,$$

$\lambda$ et $\mu$ désignant des inconnues auxiliaires; de sorte que la co
dition d'intégrabilité (36) où l'on remplacera $dp$, $\delta p$, $dq$, $\delta q$ p
leurs valeurs déduites des équations précédentes prendra la for

$$(\lambda - \mu)(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) = 0,$$

et elle exprimera simplement, $\lambda$ étant différent de $\mu$, la propri
d'orthogonalité des deux familles de lignes de courbure.

1033. D'après cela, supposons qu'une surface $(\Sigma)$ ait toutes
lignes de courbure sphériques. Désignons par $(S_1)$ les sphè
qui contiennent les lignes de première courbure et par $(S_2)$
sphères qui contiennent les lignes de seconde courbure. Soient
l'angle sous lequel la surface doit couper la sphère $(S_1)$ et
l'angle sous lequel elle doit couper la sphère $(S_2)$. Parmi
sphères $(S_1)$ et $(S_2)$, choisissons celles qui se coupent en
point M de l'espace et dont l'intersection est un cercle (C)
passe en M. Le plan tangent en M à la surface cherchée sera é
demment défini par la double condition de faire les angles $\omega_1$ et
respectivement avec les plans tangents en M aux deux sphères (
et $(S_2)$; cette double condition montre qu'il doit être tangen
deux cônes de révolution ayant pour axes les rayons des d
sphères qui passent en M, ce qui donne, en général, quatre pl
distincts. Prenons l'un quelconque d'entre eux. Il coupera
demment les deux plans tangents aux sphères suivant *les d
tangentes principales de la surface cherchée*. Par conséqu
pour que la surface existe, pour que la condition d'intégrabi
soit vérifiée, il sera nécessaire et suffisant que ces deux dro
soient *rectangulaires*. Cela donne une condition à laqu
doivent satisfaire les deux familles de sphères $(S_1)$ et $(S_2)$. C
condition peut d'ailleurs s'exprimer sous la forme suivante.

Pour chaque point du cercle (C), construisons le trièdre a
pour arêtes les rayons des deux sphères $(S_1)$, $(S_2)$ qui aboutis
à ce point et la normale à la surface cherchée : *le dièdre fo
par les faces du trièdre qui se coupent suivant cette norm
devra être droit;* et, par suite, si V désigne l'angle des sph
$(S_1)$, $(S_2)$, la Trigonométrie nous donnera immédiatement la r
tion suivante

$$(38) \qquad \cos V = \cos\omega_1 \cos\omega_2,$$

Si les équations des deux familles de sphères $(S_1)$ et $(S_2)$ sont données sous les formes suivantes

$$(39)\quad \begin{cases} (x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=r_1^2, \\ (x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2=r_2^2, \end{cases}$$

$a_1$, $b_1$, $c_1$, $r_1$, $\omega_1$ étant fonctions d'un paramètre $\alpha$ et $a_2$, $b_2$, $c_2$, $r_2$ d'un autre paramètre $\beta$, la relation (38) donnera la condition

$$(40)\quad (a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\omega_1\cos\omega_2,$$

qui devra être vérifiée identiquement et qui a été le point de départ du Mémoire de M. J.-A. Serret [1].

**1034.** Au lieu de suivre la même méthode, nous reprendrons le cercle (C) intersection des deux sphères $(S_1)$ et $(S_2)$ et nous remarquerons que, si $(\Sigma)$ est la surface cherchée, une sphère (U) tangente en M à $(\Sigma)$ coupera le cercle (C) en un second point $M_1$ tel que le plan tangent à cette sphère en $M_1$ fasse aussi les angles $\omega_1$, $\omega_2$ avec les deux sphères $(S_1)$, $(S_2)$ et coupe les plans tangents en ce même point $M_1$ aux deux sphères suivant deux droites rectangulaires. Il sera donc toujours possible d'associer à la surface cherchée $(\Sigma)$ une autre surface $(\Sigma_1)$ de mêmes propriétés, de même définition, coupant les sphères $(S_1)$ et $(S_2)$ sous les mêmes angles, telle, en outre, que $(\Sigma)$ et $(\Sigma_1)$ constituent, à elles deux, les deux nappes de l'enveloppe des sphères variables (U); et, de plus, *les lignes de courbure se correspondront évidemment sur les deux nappes de cette enveloppe de sphères* [2].

Nous pourrons donc appliquer les propositions démontrées au

---

[1] J.-A. SERRET, *Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques* (*Journal de Liouville*, t. XVIII, 1re série, p. 113; 1853).

[2] Pour bien comprendre ce point essentiel, remarquons que, lorsqu'on donne *a priori* les familles de sphères $(S_1)$, $(S_2)$ ainsi que les angles $\omega_1$, $\omega_2$ sous lesquels ces sphères doivent être coupées par la surface cherchée $(\Sigma)$, cette surface devra vérifier deux équations aux dérivées partielles du premier ordre qui admettront une intégrale commune *avec une constante arbitraire* toutes les fois que la condition (38) ou (40) sera vérifiée. Mais, comme il passe, en chaque point du cercle (C), *quatre* plans tangents coupant respectivement les sphères $(S_1)$, $(S_2)$ sous les angles $\omega_1$, $\omega_2$, il y aura *quatre* familles distinctes de surfaces $(\Sigma)$,

Livre IV, Chapitre XV, relativement à ces enveloppes. Pour plus de symétrie, nous emploierons les coordonnées pentasphériques (Liv. II, Chap. VI). Soit

$$(41) \qquad \sum_1^5 m_i x_i = 0$$

l'équation de la sphère (U). Soient de même

$$(42) \qquad \sum_1^5 a_i x_i = 0, \qquad (43) \qquad \sum_1^5 b_i x_i = 0$$

les équations des sphères $(S_1)$ et $(S_2)$; les $a_i$ étant des fonctions d'un paramètre $\alpha$ et les $b_i$ des fonctions d'un paramètre $\beta$; les $m_i$ dépendront à la fois de $\alpha$ et de $\beta$.

Pour avoir les deux points de contact de (U) avec son enveloppe, il faut joindre à l'équation (41) ses deux dérivées

$$(44) \qquad \sum_1^5 \frac{\partial m_i}{\partial \alpha} x_i = 0, \qquad \sum_1^5 \frac{\partial m_i}{\partial \beta} x_i = 0.$$

Les deux points de contact devant se trouver par hypothèse sur les sphères $(S_1)$, $(S_2)$, les cinq équations précédentes doivent se réduire à trois. On aura donc nécessairement

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial m_i}{\partial \alpha} &= \lambda m_i + A a_i + B_1 b_i, \\ \frac{\partial m_i}{\partial \beta} &= \lambda_1 m_i + A_1 a_i + B b_i, \end{aligned} \right.$$

$\lambda$, $\lambda_1$, A, B, $A_1$, $B_1$ étant des fonctions auxiliaires et $i$ devant recevoir les valeurs 1, 2, ..., 5.

D'autre part, les six coordonnées $m_i$ de la sphère (U) doivent être (n° 477) des solutions particulières d'une équation aux dérivées partielles de la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 m_i}{\partial \alpha \, \partial \beta} + C \frac{\partial m_i}{\partial \alpha} + D \frac{\partial m_i}{\partial \beta} + E m_i = 0.$$

---

qui correspondront aux quatre plans précédents; et ces familles se grouperont deux à deux de telle manière que deux surfaces différentes prises dans deux familles associées forment les deux nappes de l'enveloppe de sphères que nous considérons dans le texte.

Substituons dans cette équation les valeurs de $\frac{\partial m_i}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial m_i}{\partial \beta}$ définies par les équations (45) et celle de $\frac{\partial^2 m_i}{\partial \alpha \, \partial \beta}$ déduite, par exemple, de la première de ces équations. Nous aurons

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} + C\lambda + D\lambda_1 + \lambda\lambda_1 + E\right) m_i + \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} + CA + DA_1 + \lambda A_1\right) a_i \\ &\qquad + \left(\frac{\partial B_1}{\partial \beta} + CB_1 + DB + \lambda B\right) b_i + B_1 b'_i = 0. \end{aligned} \right.$$

Si les coefficients de $a_i$, $b_i$, $b'_i$, $m_i$ dans cette équation n'étaient pas nuls, l'équation (41) de la sphère tangente apparaîtrait comme une combinaison linéaire des équations

$$\sum a_i x_i = 0, \qquad \sum b_i x_i = 0, \qquad \sum b'_i x_i = 0,$$

ce qui est en contradiction avec la remarque faite au début de ce numéro, ces trois équations définissant deux points *déterminés* du cercle (C). Il faut donc que la relation (46) se réduise à une identité et que l'on ait, en particulier,

$$B_1 = 0.$$

On verra de même que l'on a aussi

$$A_1 = 0,$$

de sorte que les deux équations (45) peuvent se ramener à la forme plus simple

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial m_i}{\partial \alpha} &= \lambda m_i + A a_i, \\ \frac{\partial m_i}{\partial \beta} &= \lambda_1 m_i + B b_i. \end{aligned} \right.$$

Écrivons maintenant que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 m_i}{\partial \alpha \, \partial \beta}$ déduites de ces équations sont égales. Il viendra

$$m_i \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha}\right) + a_i \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \lambda_1 A\right) - b_i \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} - \lambda B\right) = 0.$$

Pour les raisons déjà indiquées, on doit avoir

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial \beta} = \lambda_1 A, \qquad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = \lambda B.$$

Ces équations nous donnent, en introduisant une fonctic auxiliaire $h$,

$$\lambda = -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial \alpha}, \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial(\mathrm{A}h)}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial(\mathrm{B}h)}{\partial \alpha} = 0.$$

Nous aurons donc

$$\mathrm{A}h = f(\alpha), \qquad \mathrm{B}h = \varphi(\beta)$$

et les équations (47) nous fourniront la valeur suivante de $m_i$

$$m_i h = \int a_i f(\alpha)\, d\alpha + \int b_i \varphi(\beta)\, d\beta.$$

Comme on peut évidemment multiplier tous les $m_i$ par une fon tion quelconque $h$, nous pourrons prendre, *pour* $i = 1, 2, 3, 4$,

$$m_i = \int a_i f(\alpha)\, d\alpha + \int b_i \varphi(\beta)\, d\beta.$$

L'équation à laquelle satisfont (n° 477) les *six* coordonnées de sphère sera donc

$$\frac{\partial^2 m_i}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0,$$

de sorte que *la sixième coordonnée* $m_6$ *sera, elle aussi, somme d'une fonction de* $\alpha$ *et d'une fonction de* $\beta$.

**1035.** Réciproquement, considérons la surface enveloppe d'u sphère pour laquelle les *six* coordonnées sont données par la fo mule

$$(48) \qquad m_i = \mathrm{A}_i + \mathrm{B}_i,$$

où $\mathrm{A}_i$, $\mathrm{B}_i$ dépendent respectivement de $\alpha$ et de $\beta$. Pour obtenir surface il faudra joindre à l'équation

$$(49) \qquad \sum_1^5 (\mathrm{A}_i + \mathrm{B}_i) x_i = 0$$

ses deux dérivées

$$(50) \qquad \sum_1^5 \mathrm{A}'_i x_i = 0, \qquad \sum_1^5 \mathrm{B}'_i x_i = 0,$$

par rapport à $\alpha$ et à $\beta$. Prises isolément, les deux équations précédentes définissent deux courbes sphériques de la surface. La sphère qui contient la première, par exemple, coupe la surface sous un angle $\omega_1$ défini par la formule (nº 156)

$$\cos\omega_1 = \frac{\sum_1^5 A'_i(A_i+B_i)}{(A_6+B_6)\sqrt{-\sum_1^5 A'^2_i}}.$$

Or si l'on différentie, par rapport à $\alpha$, la relation identique

$$\sum_1^6 (A_i+B_i)^2 = 0,$$

qui doit nécessairement exister (nº 156) entre les six coordonnées de la sphère, il vient

$$\sum_1^5 A'_i(A_i+B_i) + A'_6(A_6+B_6) = 0,$$

de sorte que l'on a

$$(51)\qquad \cos\omega_1 = \frac{-A'_6}{\sqrt{-\sum_1^5 A'^2_i}}.$$

L'angle $\omega_1$ étant une fonction de $\alpha$, on voit que la sphère définie par la première équation (50) coupe la surface sous un angle qui est partout le même; et, par suite, les courbes de paramètre $\alpha$ sont des lignes de courbure sphériques de la surface. La démonstration est toute semblable pour les lignes de paramètre $\beta$.

En résumé, nous obtenons la proposition suivante :

*Pour définir les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques, on déterminera de la manière la plus générale six fonctions* $A_i$ *de* $\alpha$ *et six fonctions* $B_i$ *de* $\beta$ *vé-*

*rifiant identiquement la relation*

$$(52)\qquad \sum_1^6 (A_i + B_i)^2 = 0,$$

*puis on prendra l'enveloppe de la sphère variable*

$$(53)\qquad \sum_1^5 (A_i + B_i) x_i = 0.$$

*Les deux nappes de cette enveloppe seront deux des surfaces cherchées.*

C'est la proposition déjà énoncée au n° 483.

1036. Appliquons-la à la détermination effective des surfaces cherchées : il faudra d'abord résoudre l'équation fonctionnelle (52). Cette résolution se simplifie beaucoup si l'on emploie toutes les substitutions linéaires orthogonales, qui transforment en elle-même la forme quadratique

$$\sum_1^6 m_i^2.$$

Dans la géométrie des sphères elles jouent le même rôle que le changement de coordonnées dans la géométrie du plan. En utilisant les résultats obtenus au Livre II, Chap. VI, on reconnaîtra aisément qu'on les obtient toutes en combinant des déplacements, des inversions, des *dilatations* (augmentation d'une quantité constante pour le rayon de toute sphère). Nous admettrons ce résultat.

Si nous différentions l'équation à résoudre par rapport à $\alpha$ et à $\beta$, elle devient

$$(54)\qquad \sum_1^6 A'_i B'_i = 0.$$

Étudions d'abord cette dernière équation.

Comme tous les $B'_i$ ne sont pas nuls, en donnant à $\beta$ une valeur

fixe quelconque, on obtiendra au moins une relation linéaire, *à coefficients constants,* entre les $A'_i$. Supposons d'abord qu'il n'existe qu'une pareille relation, savoir

$$\sum_1^6 l_i A'_i = 0.$$

Si l'on a

$$\sum l_i^2 \neq 0,$$

on peut, par une substitution orthogonale, ramener la relation à la forme

$$A'_6 = 0, \tag{55}$$

et si l'on a

$$\sum l_i^2 = 0,$$

on la ramène de même à la forme suivante

$$A'_5 + i A'_6 = 0. \tag{56}$$

Dans le premier cas, pour que l'équation (54) soit vérifiée, il faut que l'on ait

$$B'_1 = B'_2 = B'_3 = B'_4 = B'_5 = 0$$

et l'équation (52) devient alors

$$\sum_1^5 (A_i + B_i)^2 = -(A_6 + B_6)^2.$$

Le premier membre ne pouvant dépendre que de $\alpha$ et le second dépendant *nécessairement* de $\beta$, il y a impossibilité. Le raisonnement s'appliquera de même si l'on substitue la relation (56) à la précédente (55). Il n'y a donc, en ayant égard à ce que l'échange de $\alpha$ et de $\beta$ revient à un changement de notations, qu'à examiner deux hypothèses : 1° ou bien il y a deux relations linéaires entre les dérivées $A'_i$ par exemple, et quatre entre les dérivées $B'_i$; 2° ou bien il y a trois relations linéaires entre les unes et les autres.

Une discussion facile montre que des relations linéaires, en nombre quelconque, entre les $A'_i$ par exemple, peuvent toujours,

par une substitution orthogonale, être ramenées à vérifier le deux conditions suivantes :

1° Chaque relation sera de la forme

$$A'_h = 0 \qquad \text{ou} \qquad A'_h + iA'_k = 0;$$

2° De plus, la même dérivée $A'_h$ ne figure que dans une seul relation.

Les cas où quelques-unes des relations contiennent deux dér vées se déduisent des autres par le passage à la limite.

1037. D'après cela, s'il y a deux relations seulement ent les $A'_i$, on pourra, en se bornant au cas général, les prendre sou la forme

$$A'_4 = 0, \qquad A'_5 = 0.$$

Il faudra que l'on ait

$$B'_1 = B'_2 = B'_3 = B'_6 = 0;$$

par suite, $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_6$, $A_5$, $A_4$ seront des constantes que l'o pourra prendre égales à zéro; de sorte que l'équation à vérifie prendra la forme

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_6^2 = -B_5^2 - B_4^2$$

et chacun de ses membres devra se réduire à une constante. O pourra prendre par exemple

$$B_4 = \cos\beta, \qquad B_5 = \sin\beta,$$
$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_6^2 = -1.$$

Si l'on choisit un système de *sphères coordonnées* comprenai les trois plans principaux, la sphère de coordonnées $m_i$ sera de finie, en coordonnées cartésiennes $x, y, z$, par l'équation suivan

$$2m_1x + 2m_2y + 2m_3z + m_4\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + im_5\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = 0;$$

de sorte qu'ici la surface cherchée deviendra l'enveloppe de

sphère

$$(57)\qquad 2A_1x + 2A_2y + 2A_3z + e^{i\beta}\frac{x^2+y^2+z^2}{R} - e^{-i\beta}R = 0.$$

En joignant à l'équation précédente les deux dérivées

$$(58)\qquad \begin{cases} A'_1x + A'_2y + A'_3z = 0, \\ e^{i\beta}(x^2+y^2+z^2) + e^{-i\beta}R^2 = 0, \end{cases}$$

on reconnaît que cette surface se réduit à un cône, d'ailleurs quelconque.

**1038.** Envisageons maintenant le cas où il y a trois relations entre les $A'_i$; et, nous bornant toujours au cas le plus général, prenons-les sous la forme

$$A'_4 = A'_5 = A'_6 = 0;$$

il viendra

$$B'_1 = B'_2 = B'_3 = 0.$$

On pourra encore supposer nulles $A_4$, $A_5$, $A_6$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, et l'on aura

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = -B_4^2 - B_5^2 - B_6^2.$$

Il sera nécessaire et suffisant que les deux membres se réduisent à une même constante.

La surface étant l'enveloppe de la sphère définie par l'équation

$$(59)\qquad \begin{cases} 2A_1x + 2A_2y + 2A_3z + B_4\dfrac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} \\ \qquad\qquad + iB_5\dfrac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = 0, \end{cases}$$

il faudra joindre à cette équation les deux dérivées

$$(60)\qquad \begin{cases} A'_1x + A'_2y + A'_3z = 0, \\ B'_4\dfrac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} + iB'_5\dfrac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = 0. \end{cases}$$

On voit que les lignes de première courbure sont dans les plans tangents d'un cône et que les lignes de seconde courbure sont sur les sphères ayant pour centre le sommet de ce cône. On reconnaît

*la surface de Monge, dont toutes les normales sont tangentes à un cône.*

En résumé, on peut énoncer le théorème suivant :

*Les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques se déduisent, par des inversions et des dilatations, soit d'un cône, soit de la surface dont toutes les normales sont tangentes à un cône, ou bien elles dérivent par dégénérescence des surfaces ainsi obtenues.*

# CHAPITRE XII.

## GÉNÉRALISATIONS DIVERSES.

Systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à $n$ variables indépendantes dans lesquels chaque équation ne contient qu'une dérivée seconde prise par rapport à deux variables différentes. — Forme type de ces systèmes, condition pour qu'ils admettent $n+1$ intégrales linéairement indépendantes. — Extension à ces systèmes de la méthode de Laplace. — Comment on les intègre lorsque la suite de Laplace se termine dans un sens. — Indication de certains systèmes généraux dont l'intégrale peut être obtenue. — Cas particuliers. — Applications géométriques. — Systèmes de coordonnées curvilignes à lignes conjuguées. — Ces systèmes sont les seuls qui puissent correspondre à d'autres systèmes, les plans tangents aux surfaces coordonnées étant parallèles pour les points correspondants. — Interprétation géométrique des substitutions de Laplace généralisées. — Cas particulier des systèmes triples orthogonaux. — Théorème de M. Combescure. — Démonstration directe de ce théorème. — Application. — Détermination d'une classe de systèmes triples pour lesquels toutes les lignes de courbure sont planes. — En combinant l'inversion avec le théorème de M. Combescure, on peut faire dériver d'un système triple orthogonal une suite illimitée de systèmes analogues. — Détermination des systèmes orthogonaux à lignes de courbure planes dans un seul système. — Détermination des systèmes orthogonaux à lignes de courbure sphériques dans un seul système.

---

1039. Bien qu'il n'entre pas dans notre plan de faire une étude détaillée et complète des systèmes orthogonaux, nous croyons cependant qu'il sera utile, pour bien saisir les méthodes précédentes, de montrer comment elles peuvent être généralisées et étendues. Nous trouverons ainsi l'occasion de revenir sur les propositions analytiques établies au Livre IV et de montrer qu'elles peuvent être beaucoup développées; que les démonstrations subsistent, presque sans modification, lorsqu'on substitue à une équation linéaire du second ordre certains systèmes du même ordre auxquels doit satisfaire une fonction inconnue de plusieurs variables.

Désignons par $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ un système de $n$ variables

indépendantes et envisageons le système des équations

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} = a_{ik}\frac{\partial u}{\partial \rho_k} + a_{ki}\frac{\partial u}{\partial \rho_i},$$

où $i$ et $k$ peuvent prendre deux valeurs différentes quelconques dans la suite $0, 1, 2, \ldots, n-1$; de sorte que le système comprend $\frac{n(n-1)}{2}$ équations simultanées. Nous chercherons en premier lieu les conditions qui sont nécessaires pour qu'il admette, en dehors de la solution évidente $u=1$, $n$ solutions distinctes, linéairement indépendantes.

Pour obtenir ces conditions, nous allons former de trois manières différentes les valeurs des dérivées troisièmes telles que $\frac{\partial^3 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k \partial \rho_l}$ et nous écrirons que ces valeurs sont égales. On trouve, par exemple, en prenant la dérivée de l'équation (1) par rapport à $\rho_l$, $l$ étant différent de $i$ et de $k$, et en substituant les valeurs des dérivées secondes qu'introduit cette opération,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k \partial \rho_l} &= \left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial \rho_l} + a_{ki}a_{li}\right)\frac{\partial u}{\partial \rho_i}\\ &+ \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial \rho_l} + a_{ik}a_{lk}\right)\frac{\partial u}{\partial \rho_k} + (a_{ki}a_{il} + a_{ik}a_{kl})\frac{\partial u}{\partial \rho_l}.\end{aligned}$$

Permutons dans les deux membres les indices $k$ et $l$, par exemple; le premier membre ne changera pas. Comme, par hypothèse, le système doit admettre $n$ solutions linéairement indépendantes ou, ce qui revient au même, une solution dont les dérivées premières peuvent être choisies arbitrairement pour un système quelconque de valeurs des variables indépendantes, les coefficients des mêmes dérivées du premier ordre devront être égaux dans les deux expressions ainsi obtenues de la dérivée troisième. Cela nous conduit à des relations du type suivant

$$(2) \qquad \frac{\partial a_{ik}}{\partial \rho_l} = a_{il}a_{lk} + a_{li}a_{ik} - a_{ik}a_{lk} \qquad (i \neq k \neq l).$$

Échangeons dans cette relation les indices $i$ et $l$ : le second membre ne change pas. On doit donc avoir

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial \rho_l} = \frac{\partial a_{lk}}{\partial \rho_i};$$

et, par conséquent, $a_{ik}$, $a_{lk}$ sont les dérivées, par rapport à $\rho_i$ et à $\rho_l$, d'une même fonction que nous désignerons par $\log H_k$; de sorte que l'on pourra poser

$$(3) \qquad a_{ik} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} \qquad (i \neq k).$$

L'équation de condition (2) deviendra

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 H_k}{\partial \rho_i \partial \rho_l} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_l}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} + \frac{1}{H_l}\frac{\partial H_l}{\partial \rho_i}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_l},$$

et le système (1) prendra la forme suivante

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} - \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}\frac{\partial u}{\partial \rho_k} - \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_k}\frac{\partial u}{\partial \rho_i} = 0 \quad \left(\begin{matrix} i \neq k, \\ i, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{matrix}\right).$$

Les relations (4), auxquelles doivent satisfaire les fonctions $H_i$, sont au nombre de $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$. Nous indiquerons plus loin de nombreux exemples dans lesquels ces relations en si grand nombre sont toutes vérifiées. Dans ce cas le système (5) admettra d'ailleurs, non seulement $n$ solutions particulières linéairement indépendantes, mais aussi une solution générale contenant $n$ fonctions arbitraires d'une seule variable indépendante; c'est-à-dire que, si l'on calcule de proche en proche les dérivées des différents ordres de $u$ pour un système quelconque de valeurs de $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$, les dérivées de chaque ordre relatives à une seule variable $\frac{\partial^m u}{\partial \rho^m}$, $\frac{\partial^m u}{\partial \rho_1^m}$, ... demeureront toujours arbitraires.

Pour ne pas compliquer la théorie, nous avons laissé de côté les systèmes de la forme

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} - a_{ik}\frac{\partial u}{\partial \rho_k} - a_{ki}\frac{\partial u}{\partial \rho_i} - b_{ik} u = 0,$$

qui contiennent la fonction inconnue; mais, dès que l'on en connaîtra une solution particulière $u'$, il suffira d'effectuer la substitution

$$u = u' v,$$

pour être ramené à un système en $v$ qui devra admettre la solu-

tion $v = 1$ et, par suite, sera de la forme (1). On peut donc dire que, dès qu'un système de la forme précédente admet $n+1$ solutions linéairement indépendantes, il est réductible à la forme (5) et admet une solution contenant $n$ fonctions arbitraires d'une variable.

**1040.** Si l'on désigne, conformément à une notation déjà employée au Livre IV, par $f_{ik}(u)$ le premier membre de l'équation (5), c'est-à-dire si l'on pose

$$(7) \qquad f_{ik}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_k} - \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}\frac{\partial u}{\partial \rho_k} - \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_k}\frac{\partial u}{\partial \rho_i},$$

on reconnaîtra aisément que les relations auxquelles doivent satisfaire les $H_i$ s'expriment par la formule simple

$$(8) \qquad f_{ik}(H_l) = 0 \qquad (i \neq k \neq l),$$

D'après la manière même dont on les a obtenues, on voit qu'il y a, entre les symboles $f_{ik}$, les relations *identiques*

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial f_{ik}(u)}{\partial \rho_l} + \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_l} f_{kl}(u) + \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_k} f_{il}(u) \\ = & \frac{\partial f_{kl}(u)}{\partial \rho_i} + \frac{1}{H_l}\frac{\partial H_l}{\partial \rho_k} f_{li}(u) + \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_l} f_{ki}(u) \\ = & \frac{\partial f_{li}(u)}{\partial \rho_k} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_l} f_{ik}(u) + \frac{1}{H_l}\frac{\partial H_l}{\partial \rho_i} f_{lk}(u), \end{aligned} \right.$$

les indices $i$, $k$, $l$ étant toujours supposés différents. Ces identités montrent déjà que les relations auxquelles doivent satisfaire les fonctions H ne sont pas essentiellement distinctes.

Elles permettent encore de donner une forme plus précise à un énoncé précédent et de démontrer que, sous les conditions habituelles de continuité pour les coefficients, le système des équations aux dérivées partielles simultanées (5) admet une solution $u$ satisfaisant aux conditions initiales suivantes :

Soient $\rho^0$, $\rho_1^0$, ..., $\rho_{n-1}^0$ un système de valeurs des variables indépendantes. Choisissons $n$ fonctions $f(\rho)$, $f_1(\rho_1)$, ..., $f_{n-1}(\rho_{n-1})$, assujetties à l'unique condition de se réduire à une même constante quand on remplace dans chacune d'elles la variable $\rho_i$ par sa valeur initiale $\rho_i^0$. Il existera une solution du système (5), et

une seule, se réduisant à $f_i(\rho_i)$ lorsque toutes les variables $\rho_k$ autres que $\rho_i$ se réduiront à leurs valeurs initiales $\rho_k^0$.

Cette proposition est une simple conséquence de celle que nous avons établie au Livre IV, Chap. IV, relativement à une seule équation. Pour plus de netteté, bornons-nous au cas de trois variables indépendantes $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$. La solution cherchée $u$ doit se réduire

$$\begin{array}{lll} \text{à } f(\rho) & \text{pour} & \rho_1 = \rho_1^0, \quad \rho_2 = \rho_2^0, \\ \text{à } f_1(\rho_1) & \text{pour} & \rho = \rho^0, \quad \rho_2 = \rho_2^0. \\ \text{à } f_2(\rho_2) & \text{pour} & \rho = \rho^0, \quad \rho_1 = \rho_1^0. \end{array}$$

Elle sera donc pleinement déterminée, *pour* $\rho_1 = \rho_1^0$, par la condition de satisfaire à l'équation

$$f_{02}(u) = 0,$$

et de se réduire à $f(\rho)$ ou à $f_2(\rho_2)$ suivant que $\rho_2$ ou $\rho$ prennent les valeurs $\rho_2^0$ ou $\rho^0$. Soit $u'$ la fonction, ainsi obtenue, de $\rho$ et de $\rho_2$.

Pour le même motif, la fonction $u$ sera déterminée, *pour* $\rho = \rho^0$, par la condition de satisfaire à l'équation

$$f_{12}(u) = 0,$$

et de se réduire à $f_1(\rho_1)$ ou à $f_2(\rho_2)$ suivant que $\rho_2$ ou $\rho_1$ prennent les valeurs initiales $\rho_2^0$ ou $\rho_1^0$. Soit $u''$ la fonction ainsi obtenue de $\rho_1$ et de $\rho_2$.

Cela posé, en vertu même de la proposition que nous venons d'invoquer, la fonction cherchée $u$ sera complètement déterminée par la condition de satisfaire à l'équation

$$(a) \qquad f_{01}(u) = 0,$$

pour toutes les valeurs de $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, de se réduire à $u'$, pour $\rho_1 = \rho_1^0$, et à $u''$ pour $\rho = \rho^0$. Il ne reste plus qu'à démontrer que la fonction ainsi obtenue satisfait, pour toutes les valeurs des variables indépendantes, aux deux autres équations

$$f_{02}(u) = 0, \qquad f_{12}(u) = 0,$$

qui composent, dans ce cas, le système (5).

Si l'on tient compte de l'équation $(a)$, les identités (9) nous

donnent ici les relations

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho} f_{12}(u) + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} f_{02}(u), \\ & = \frac{\partial f_{12}(u)}{\partial \rho} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} f_{02}(u), \\ & = \frac{\partial f_{20}(u)}{\partial \rho_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho} f_{12}(u), \end{aligned} \right.$$

qui ont lieu pour toutes les valeurs des variables indépendantes.

Ces relations peuvent être envisagées comme des équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquelles doivent satisfaire les deux fonctions inconnues $f_{20}(u)$, $f_{21}(u)$. En éliminant, par exemple, $f_{20}(u)$, on sera conduit à une équation de la forme

$$(c) \qquad \frac{\partial^2 f_{12}(u)}{\partial \rho\, \partial \rho_1} + A \frac{\partial f_{12}(u)}{\partial \rho} + B \frac{\partial f_{12}(u)}{\partial \rho_1} + C f_{12}(u) = 0.$$

Recherchons les conditions initiales auxquelles doit satisfaire $f_{12}(u)$. On a d'abord, $u$ se réduisant alors à $u''$,

$$f_{12}(u) = 0 \quad \text{pour} \quad \rho = \rho^0,$$

D'autre part, si l'on fait, dans les identités $(b)$, $\rho_1 = \rho_1^0$, comme on a alors $f_{02}(u) = 0$, il vient

$$\frac{\partial f_{12}(u)}{\partial \rho} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho} f_{12}(u),$$

et, de là, on déduit

$$f_{12}(u) = H_1 \psi(\rho_2) \quad \text{pour} \quad \rho_1 = \rho_1^0.$$

Mais comme $f_{12}(u)$ est nul par hypothèse pour $\rho = \rho^0$, quelles que soient les autres variables, il faudra que l'on ait

$$H_1 \psi(\rho_2) = 0 \quad \text{pour} \quad \rho = \rho^0,$$

et, par conséquent, $H_1$ n'étant pas nul en vertu des conditions de continuité,

$$\psi(\rho_2) = 0.$$

On voit que la fonction $f_{12}(u)$ devra être nulle soit pour $\rho = \rho^0$ soit pour $\rho_1 = \rho_1^0$ et, comme elle doit en outre vérifier l'équation $(c)$, elle sera nécessairement nulle pour toutes les valeurs de $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$.

Le raisonnement fait pour $f_{12}(u)$ se répète évidemment pour $f_{02}(u)$ et l'on voit que la fonction $u$ satisfait aussi à l'équation

$$f_{02}(u) = 0,$$

ce qui achève la démonstration.

**1041.** Nous ajouterons la remarque suivante relative aux relations entre les $H_i$. Introduisons les quantités $\beta_{ik}$ définies par la formule

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}. \tag{10}$$

Les relations (4) ou (8) s'exprimeront uniquement au moyen des $\beta_{ik}$ et prendront la forme simple

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \rho_l} = \beta_{il}\beta_{lk} \qquad (i \neq k \neq l); \tag{11}$$

de sorte que, si l'on pose

$$\beta_{ik}\beta_{ki} = \omega_{ik},$$

il viendra

$$\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \rho_l} = \beta_{ik}\beta_{kl}\beta_{li} + \beta_{ki}\beta_{il}\beta_{lk},$$

et l'on aura, par suite,

$$\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \rho_l} = \frac{\partial \omega_{kl}}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \omega_{li}}{\partial \rho_k}.$$

Ces relations permettent d'introduire une fonction V telle que l'on ait

$$\omega_{ik} = \beta_{ik}\beta_{ki} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_i \, \partial \rho_k}.$$

On peut exprimer tous les $\beta_{ik}$ en fonction de V, former des équations aux dérivées partielles auxquelles V devra satisfaire; mais nous laisserons de côté tout ce qui concerne cette fonction.

**1042.** Supposons que l'on ait obtenu d'une manière quelconque un système de la forme (5), pour lequel toutes les conditions d'intégrabilité soient vérifiées, et proposons-nous de rechercher comment on peut l'intégrer.

Nous allons montrer qu'ici encore on peut employer avec succès la substitution de Laplace (nº 330).

Considérons, en effet, l'équation particulière

$$f_{ik}(u) = 0. \tag{12}$$

Si elle était seule et si l'on voulait lui appliquer la substitution de Laplace, il faudrait, par exemple, substituer à $u$ la fonction $v$, définie par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_i} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}(u+v). \tag{13}$$

Si l'on pose alors

$$L_k = \frac{H_k}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_k} - \frac{H_k^2}{\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}}\frac{\partial^2 \log H_k}{\partial \rho_k\, \partial \rho_i} = -\frac{H_k}{\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}} f_{ik}(H_k), \tag{14}$$

on aura

$$\frac{\partial v}{\partial \rho_k} = \frac{L_k}{H_k}(u+v), \tag{15}$$

et $v$ satisfera à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho_i\, \partial \rho_k} - \frac{1}{L_k}\frac{\partial L_k}{\partial \rho_i}\frac{\partial v}{\partial \rho_k} - \frac{1}{L_i}\frac{\partial L_i}{\partial \rho_k}\frac{\partial v}{\partial \rho_i} = 0, \tag{16}$$

où l'on a posé

$$L_i = \frac{H_i H_k}{\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}}. \tag{17}$$

On verra de même que si l'on introduit les quantités $L_{k'}$ définies par les relations

$$L_{k'} = \frac{H_k \frac{\partial H_{k'}}{\partial \rho_i} - H_{k'}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}}{\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}} \qquad (k' \neq i \neq k), \tag{18}$$

la fonction $v$ satisfera, pour toutes les valeurs distinctes de $i'$ et de $k'$, au système

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho_{i'}\, \partial \rho_{k'}} = \frac{1}{L_{i'}}\frac{\partial L_{i'}}{\partial \rho_{k'}}\frac{\partial v}{\partial \rho_{i'}} + \frac{1}{L_{k'}}\frac{\partial L_{k'}}{\partial \rho_{i'}}\frac{\partial v}{\partial \rho_{k'}}, \tag{19}$$

tout semblable au proposé.

Comme on a $\frac{n(n-1)}{2}$ équations, comme chacune fournit deux substitutions, on voit que chaque système de la forme (5) admettra, en général, $n(n-1)$ systèmes dérivés, $n(n-1)$ systèmes *contigus*. De ceux-ci, on pourra en déduire d'autres et continuer, soit indéfiniment, soit au moins jusqu'à ce que l'une des équations qui composent le système ait un de ses deux invariants égal à zéro.

Il y a de nombreuses relations entre toutes les substitutions ainsi obtenues : nous nous contenterons de signaler la propriété suivante :

Si l'on désigne par $S_{ik}$ la substitution définie par la formule (13), l'effet de deux substitutions $S_{ik}$, $S_{i'k'}$ appliquées successivement ne change pas lorsqu'on échange, soit les deux premiers, soit les deux seconds indices.

**1043.** Examinons ce qui arrive lorsqu'une des substitutions $S_{ik}$ devient impossible, c'est-à-dire lorsque l'équation d'indices $i$ et $k$ du système (5) a l'un de ses invariants nuls. Pour plus de simplicité, nous nous bornerons au cas de trois variables $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, qui se présentera seul dans les applications.

Considérons l'équation

$$(20) \qquad f_{12}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho_2}\frac{\partial u}{\partial\rho_1} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho_1}\frac{\partial u}{\partial\rho_2} = 0,$$

et supposons que son invariant

$$-\frac{\partial^2 \log H_1}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho_2}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho_1}$$

soit nul. Cela se traduira par la relation

$$(21) \qquad f_{12}(H_1) = 0.$$

On a déjà

$$f_{02}(H_1) = 0.$$

Si donc nous substituons $H_1$ à la place de $u$ dans les identités (9) où l'on remplacera par 0, 1, 2 les indices différents $i$, $k$, $l$,

il viendra

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} f_{01}(H_1) = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial \rho_2} f_{01}(H_1) = \frac{\partial}{\partial \rho_2} f_{01}(H_1).$$

On déduit donc de là, soit

$$(22) \qquad f_{01}(H_1) = 0,$$

soit

$$(23) \qquad \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial \rho_2}.$$

Envisageons d'abord la première hypothèse : $H_1$ est alors une solution des trois équations qui composent le système; si l'on effectue la substitution

$$u = H_1 v,$$

on aura un système tout semblable au proposé, mais dans lequel, $H_2$ et $H_3$ étant remplacés par de nouvelles fonctions, $H_1$ serait fait égal à l'unité. Introduisons donc, pour ne pas changer de notations, cette hypothèse directement dans le système proposé. La première et la troisième équation s'intégreront à vue et nous donneront

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_2} = H_2 S_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho} = H T_1,$$

$S_1$ et $T_1$ étant des fonctions qui ne dépendent pas de $\rho_1$. Portant successivement les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial \rho}$, $\frac{\partial u}{\partial \rho_2}$ dans la seconde équation, nous trouverons

$$\frac{\partial S_1}{\partial \rho} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H}{\partial \rho_2} T_1, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial \rho_2} = \frac{1}{H}\frac{\partial H_2}{\partial \rho} S_1.$$

Il est clair que ces équations ne peuvent fournir des valeurs de $S_1$ et de $T_1$ indépendantes de $\rho_1$ que si l'on a

$$\frac{\partial H}{\partial \rho_2} = H_2 A_1, \qquad \frac{\partial H_2}{\partial \rho} = H B_1,$$

$A_1$ et $B_1$ ne dépendant nullement de $\rho_1$. Alors $S_1$ et $T_1$ se détermineront par le système

$$\frac{\partial S_1}{\partial \rho} = A_1 T_1, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial \rho_2} = B_1 S_1,$$

qui ne contient que *deux* variables indépendantes. Puis on aura

$$(24) \qquad u = \int (\mathrm{HT}_1\, d\rho + \mathrm{H}_2 \mathrm{S}_1\, d\rho_2) + f(\rho_1).$$

**1044.** Examinons maintenant la seconde hypothèse, celle où l'on a

$$\frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial \rho_2} = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \rho_2},$$

ce qui donne

$$\frac{\mathrm{H}_1}{\mathrm{H}} = \mathrm{R}_2,$$

$\mathrm{R}_2$ ne dépendant pas de $\rho_2$. Si nous faisons la substitution

$$u = \mathrm{H}_1 v,$$

nos trois équations deviendront

$$f_{12}(\mathrm{H}_1 v) = \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\mathrm{H}_1 \frac{\partial v}{\partial \rho_2}\right) - \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial \rho_1} \mathrm{H}_1 \frac{\partial v}{\partial \rho_2} = 0,$$

$$f_{02}(\mathrm{H}_1 v) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\mathrm{H}_1 \frac{\partial v}{\partial \rho_2}\right) - \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial \rho} \mathrm{H}_1 \frac{\partial v}{\partial \rho_2} = 0,$$

$$f_{01}(\mathrm{H}_1 v) = \mathrm{H}_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \rho\, \partial \rho_1} + \mathrm{H}_1 \frac{\partial \log \mathrm{R}_2}{\partial \rho_1}\frac{\partial v}{\partial \rho} + v\, f_{01}(\mathrm{H}_1) = 0.$$

Mais les identités (9) nous donnent ici la relation, déjà écrite plus haut,

$$\frac{\partial f_{01}(\mathrm{H}_1)}{\partial \rho_2} = f_{01}(\mathrm{H}_1)\frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial \rho_2},$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$f_{01}(\mathrm{H}_1) = \mathrm{H}_1 \mathrm{S}_2,$$

$\mathrm{S}_2$ étant de même définition que $\mathrm{R}_2$, c'est-à-dire ne contenant pas $\rho_2$. Les deux premières équations en $v$ admettent l'intégrale générale

$$\mathrm{H}_1 \frac{\partial v}{\partial \rho_2} = a_2 \mathrm{H}_2,$$

où $a_2$ dépend *exclusivement* de $\rho_2$. En intégrant, on déduit de là

$$v = \int_\alpha^{\rho_2} \frac{a_2 \mathrm{H}_2}{\mathrm{H}_1}\, d\rho_2 + \mathrm{U}_2,$$

$U_2$ étant indépendant de $\rho_2$ comme $S_2$ et $T_2$, et $\alpha$ désignant une constante quelconque. Comme on a

$$f_{01}(H_2) = 0,$$

l'équation

$$f_{01}(H_1 v) = 0$$

admet la solution définie par la formule

$$H_1 v = H_2;$$

et comme, après la division par $H_1$, ses coefficients sont ramenés à ne plus contenir $\rho_2$, elle admet aussi l'intégrale

$$\int_\alpha^{\rho_2} \frac{a_2 H_2}{H_1} d\rho_2.$$

Donc la solution générale du système proposé sera définie par la formule

$$v = \int_\alpha^{\rho_2} \frac{a_2 H_2}{H_1} d\rho_2 + U_2, \tag{25}$$

$U_2$ étant déterminée par la condition de vérifier l'équation

$$\frac{f_{01}(U_2 H_1)}{H_1} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + \frac{\partial \log R_2}{\partial \rho_1}\frac{\partial U_2}{\partial \rho} + S_2 U_2 = 0, \tag{26}$$

où $R_2$ et $S_2$ sont deux fonctions connues de $\rho$ et de $\rho_1$.

**1045.** La théorie complète des systèmes d'équations aux dérivées partielles précédents nous entraînerait trop loin. Nous nous contenterons de signaler rapidement le cas où la solution générale se présente sous la forme la plus simple et la plus utile pour les applications.

Pour plus de netteté, et comme la méthode est la même dans tous les cas, nous supposerons le nombre des variables égal à 3.

Supposons qu'on ait obtenu par un moyen quelconque un système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} - a_{ik}\frac{\partial u}{\partial\rho_i} - a_{ki}\frac{\partial u}{\partial\rho_k} - b_{ik} u = 0 \qquad \begin{matrix}(i \neq k),\\ (i, k = 0, 1, 2),\end{matrix} \tag{27}$$

pour lequel les conditions d'intégrabilité soient satisfaites et dont

on ait déterminé l'intégrale générale $u$. Considérons une expression de la forme suivante

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} Z = A u + A_1 \frac{\partial u}{\partial \rho} + \ldots + A_m \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} \\ + B_1 \frac{\partial u}{\partial \rho_1} + \ldots + B_n \frac{\partial^n u}{\partial \rho_1^n} + C_1 \frac{\partial u}{\partial \rho_2} + \ldots + C_p \frac{\partial^p u}{\partial \rho_2^p}, \end{aligned}\right.$$

dont nous déterminerons les coefficients par la condition que Z s'annule quand on y remplace l'intégrale générale $u$ par des intégrales particulières, linéairement indépendantes, du système proposé, en nombre égal à

$$m + n + p.$$

Nous aurons l'équivalent des expressions $(m, n)$ considérées au Chapitre VIII du Livre IV. La démonstration donnée au n° 399 montrera ici que Z est l'intégrale d'un système tout pareil au proposé (27).

Il y a là, on le voit, un moyen très général de faire dériver de tout système que l'on sait intégrer une suite illimitée d'autres systèmes dont l'intégration se rattache à celle du premier.

Supposons, par exemple, que le système proposé soit constitué par les trois équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \, \partial \rho_k} = 0.$$

En choisissant l'unité parmi les solutions particulières qui doivent annuler Z, on sera conduit à introduire le déterminant suivant :

$$(29)\quad \Delta = \begin{vmatrix} R & R' & \ldots & R^{(m)} & R_1 & R_1' & \ldots & R_1^{(n)} & R_2 & \ldots & R_2^{(p)} \\ r & r' & \ldots & r^{(m)} & r_1 & r_1' & \ldots & r_1^{(n)} & r_2 & \ldots & r_2^{(p)} \\ s & s' & \ldots & \ldots & s_1 & \ldots & \ldots & \ldots & s_2 & \ldots & \ldots \\ \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varpi & \varpi' & \ldots & \varpi^{(m)} & \varpi_1 & \varpi_1' & \ldots & \varpi_1^{(n)} & \varpi_2 & \ldots & \varpi_2^{(p)} \end{vmatrix},$$

où $r_i, s_i, \ldots, \varpi_i$ sont des fonctions *données* de la variable $\rho_i$ tandis que l'on désigne par $R, R_1, R_2$ des fonctions *arbitraires* de la variable de même indice. Ce déterminant $\Delta$ sera l'intégrale générale d'un système analogue au système (27). On peut d'ailleurs le démontrer directement en répétant le raisonnement du n° 340.

Les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfait $\Delta$ admettent les solutions particulières

$$\frac{\partial\Delta}{\partial R}, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial R_1}, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial R_2},$$

obtenues en donnant à l'une des fonctions arbitraires $R$, $R_1$, $R_2$ la valeur 1, et aux deux autres la valeur zéro. On pourra donc, par exemple, par la substitution

$$\Delta = \frac{\partial\Delta}{\partial R} U, \tag{30}$$

obtenir pour U un système d'équations aux dérivées partielles ne contenant plus la fonction U.

**1046.** Parmi les cas particuliers les plus intéressants, on peut signaler les suivants :

L'expression

$$u = \frac{R}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)} + \frac{R_1}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)} + \frac{R_2}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}, \tag{31}$$

où $R_i$ dépend de la seule variable $\rho_i$, est l'intégrale générale du système

$$(\rho_i-\rho_k)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} = \frac{\partial u}{\partial\rho_i} - \frac{\partial u}{\partial\rho_k} \qquad (i, k = 0, 1, 2). \tag{32}$$

Si l'on différentie ces équations $m-1$ fois par rapport à $\rho$, $m_1-1$ fois par rapport à $\rho_1$, $m_2-1$ fois par rapport à $\rho_2$, on verra que

$$v = \frac{\partial^{m+m_1+m_2-3} u}{\partial\rho^{m-1}\,\partial\rho_1^{m_1-1}\,\partial\rho_2^{m_2-1}}$$

est l'intégrale générale du système

$$(\rho_i-\rho_k)\frac{\partial^2 v}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} = m_k\frac{\partial v}{\partial\rho_i} - m_i\frac{\partial v}{\partial\rho_k} \qquad (i, k = 0, 1, 2), \tag{33}$$

dont nous allons dire quelques mots, en attribuant maintenant des valeurs *quelconques* aux coefficients $m_i$.

D'abord le système admet, pour toutes les valeurs de $h$, la solu-

tion particulière

$$\varphi = (\rho + h)^{-m}(\rho_1 + h)^{-m_1}(\rho_2 + h)^{-m_2}, \tag{34}$$

et, sous ce point de vue, il se rattache au suivant

$$(r_i - r_k)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} = \frac{\partial u}{\partial\rho_k} - \frac{\partial u}{\partial\rho_i} \qquad (i, k = 0, 1, 2), \tag{35}$$

où $r_i$ dépend de la seule variable $\rho_i$, et auquel se ramènent tous ceux pour lesquels il existe une infinité de solutions particulières formées du produit de trois fonctions qui dépendent, chacune, d'une seule des variables $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$. Ces solutions particulières ont d'ailleurs pour expression générale

$$u = e^{\int\frac{d\rho}{r+h} + \int\frac{d\rho_1}{r_1+h} + \int\frac{d\rho_2}{r_2+h}}, \tag{36}$$

la constante $h$ pouvant recevoir des valeurs quelconques.

En second lieu, les substitutions définies plus haut (n° **1042**) transforment le système (33) en un système analogue, où l'un des coefficients est augmenté et un autre diminué d'une unité. Cette remarque facilite beaucoup l'intégration.

Enfin ici encore on peut démontrer, en généralisant la remarque de M. Appell (n° **349**), que si

$$u = f(\rho, \rho_1, \rho_2)$$

est une solution quelconque du système, on pourra en déduire la solution plus générale

$$(c\rho + d)^{-m}(c\rho_1 + d)^{-m_1}(c\rho_2 + d)^{-m_2} f\left(\frac{a\rho + b}{c\rho + d}, \frac{a\rho_1 + b}{c\rho_1 + d}, \frac{a\rho_2 + b}{c\rho_2 + d}\right),$$

$a$, $b$, $c$, $d$ désignant des constantes quelconques.

**1047.** Nous n'insisterons pas davantage sur la théorie analytique; les applications géométriques que nous allons étudier nous fourniront d'ailleurs les moyens d'obtenir un grand nombre de systèmes intégrables de la forme que nous étudions ici.

D'après le théorème de Dupin, qui constitue certainement la propriété géométrique la plus importante des systèmes triples

orthogonaux, deux surfaces quelconques appartenant à deux familles différentes d'un système orthogonal se coupent suivant une ligne de courbure commune; de sorte que les courbes suivant lesquelles chaque surface est coupée par celles qui appartiennent à d'autres familles y forment un réseau conjugué. Proposons-nous, d'une manière générale, de trouver tous les systèmes de coordonnées curvilignes pour lesquels les lignes d'intersection des surfaces appartenant à des familles différentes tracent sur chaque surface un réseau conjugué. Si nous désignons encore par $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$ les paramètres des trois familles de surfaces qui composent le système cherché, les coordonnées cartésiennes $x$, $y$, $z$ d'un point de l'espace, considérées comme fonctions de $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, devront être des solutions particulières d'un système de la forme suivante

$$(37) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} = a_{ik}\frac{\partial u}{\partial\rho_k} + a_{ki}\frac{\partial u}{\partial\rho_k}; \qquad \begin{pmatrix} i, k = 0, 1, 2 \\ i \neq k \end{pmatrix}$$

et cette condition, qui est nécessaire, sera d'ailleurs suffisante.

Or, pour qu'un système de la forme précédente puisse admettre trois solutions $x$, $y$, $z$ linéairement indépendantes, il faut nécessairement qu'il soit réductible à la forme déjà indiquée

$$(38) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} - \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial u}{\partial\rho_i} - \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial\rho_i}\frac{\partial u}{\partial\rho_k} = 0,$$

où les fonctions $H$, $H_1$, $H_2$ vérifieront les conditions d'intégrabilité (4) ou (8).

Ces systèmes particuliers, formés de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées, ont des propriétés géométriques qui les distinguent de tous les autres systèmes de coordonnées curvilignes et dont nous allons dire quelques mots.

Étant donné un système de coordonnées curvilignes, défini par trois familles de surfaces, cherchons s'il en existe un autre, tel que les surfaces coordonnées se correspondent mutuellement dans les deux systèmes et qu'elles aient, de plus, leurs plans tangents parallèles aux points correspondants. En d'autres termes, $x$, $y$, $z$ étant les fonctions de $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$ qui définissent le premier système de coordonnées curvilignes, cherchons si l'on peut déterminer

trois fonctions $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ telles que les expressions

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \lambda_2 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} d\rho_2,$$

$$\lambda \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \lambda_1 \frac{\partial y}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \lambda_2 \frac{\partial y}{\partial \rho_2} d\rho_2,$$

$$\lambda \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho + \lambda_1 \frac{\partial z}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \lambda_2 \frac{\partial z}{\partial \rho_2} d\rho_2$$

soient des différentielles exactes $dx_1$, $dy_1$, $dz_1$. S'il en est ainsi, $x_1, y_1, z_1$, considérées comme fonctions de $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, définiront bien un système de coordonnées curvilignes jouissant de la propriété indiquée. Or les conditions d'intégrabilité des équations précédentes montrent immédiatement que $x$, $y$, $z$ doivent être des solutions particulières d'un système d'équations aux dérivées partielles de la forme (37), ce qui permet d'énoncer la proposition suivante :

*Pour que deux systèmes de coordonnées curvilignes puissent se correspondre de telle manière que chaque surface du premier système corresponde à une surface du second et qu'aux points correspondants les plans tangents aux trois surfaces homologues aient la même direction dans les deux systèmes, il est nécessaire que les surfaces de chaque système se coupent mutuellement suivant des familles de lignes formant sur chacune d'elles un réseau conjugué* (1).

1048. Du reste cette condition, qui est nécessaire, *est aussi suffisante*. On le reconnaît aisément en effectuant la transformation suivante. Étant donnée une solution quelconque $u$ du système (38), introduisons les trois quantités $U_i$ définies par la formule

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_i} = H_i U_i, \tag{39}$$

(1) Cette proposition résulte aussi de considérations géométriques très simples. Soient, en effet, M, M′ les points correspondants dans les deux systèmes. Si l'on attribue à $\rho$ une valeur déterminée, ces points décrivent deux surfaces dont les plans tangents sont parallèles. Sur ces surfaces, les courbes de paramètres $\rho_1$ et $\rho_2$ ont leurs tangentes parallèles; donc elles forment un système conjugué.

le système (38) pourra être remplacé par les *six* équations suivantes

$$(40) \qquad \frac{\partial U_i}{\partial \rho_k} = \beta_{ik} U_k \qquad (i \neq k),$$

les $\beta_{ik}$ étant les quantités déjà introduites et définies par la formule

$$(41) \qquad \beta_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}.$$

On a vu qu'elles satisfont aux équations comprises dans la formule unique (11), que l'on retrouverait ici en écrivant les conditions d'intégrabilité du système (40).

D'après cela, aux coordonnées $x$, $y$, $z$, solutions particulières du système (38), correspondent, par les formules (39), des quantités $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ telles que l'on ait

$$(42) \qquad \begin{cases} dx = HX\,d\rho + H_1 X_1\,d\rho_1 + H_2 X_2\,d\rho_2, \\ dy = HY\,d\rho + H_1 Y_1\,d\rho_1 + H_2 Y_2\,d\rho_2, \\ dz = HZ\,d\rho + H_1 Z_1\,d\rho_1 + H_2 Z_2\,d\rho_2. \end{cases}$$

Or, si l'on peut, en changeant les valeurs des fonctions H, $H_1$, $H_2$, conserver les mêmes valeurs aux fonctions $\beta_{ik}$, qui figurent seules dans le système (40), il est clair que, dans les formules précédentes, on pourra conserver les neuf quantités $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ avec d'autres expressions de H, $H_1$, $H_2$, ce qui donnera de nouvelles fonctions $x'$, $y'$, $z'$, définies par des formules telles que les suivantes

$$(43) \qquad \begin{cases} dx' = H'X\,d\rho + H'_2 X_1\,d\rho_1 + H'_2 X_2\,d\rho_2, \\ dy' = H'Y\,d\rho + H'_1 Y_1\,d\rho_1 + H'_2 Y_2\,d\rho_2, \\ dz' = H'Z\,d\rho + H'_1 Z_1\,d\rho_1 + H'_2 Z_2\,d\rho_2, \end{cases}$$

et qui détermineront évidemment un nouveau système de coordonnées curvilignes satisfaisant à la condition demandée.

Tout se réduit donc à faire voir qu'il y a une infinité de systèmes de valeurs des $H_i$ satisfaisant aux équations (41), où l'on considérera les $\beta_{ik}$ comme des fonctions données et connues. Or on reconnaît très aisément que ce système admet des intégrales contenant trois fonctions arbitraires d'une variable. Au reste, on peut établir ce résultat en le ramenant, d'une infinité de manières, à

la forme étudiée dans ce Chapitre. Car si l'on désigne par U, $U_1$, $U_2$ un système *quelconque* de solutions des équations (40), on reconnaîtra aisément que l'on a le droit, en introduisant une fonction auxiliaire $\theta$, de poser

$$H_i U_i = \frac{\partial\theta}{\partial\rho_i}; \tag{44}$$

et alors la fonction $\theta$ à laquelle se trouve ainsi ramenée la détermination des $H_i$ devra satisfaire aux trois équations

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} - \frac{1}{U_k}\frac{\partial U_k}{\partial\rho_i}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_k} - \frac{1}{U_i}\frac{\partial U_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i} = 0, \tag{45}$$

pour lesquelles les conditions d'intégrabilité seront vérifiées.

En résumé, on peut énoncer la proposition suivante :

*Toutes les fois que l'on aura des fonctions* $\beta_{ik}$ *satisfaisant aux équations* (11), *l'intégration des systèmes* (40) *et* (41), *si elle est possible, donnera, avec douze fonctions arbitraires d'une variable, des systèmes de coordonnées curvilignes à lignes conjuguées.*

*Si trois familles de surfaces se coupent suivant des lignes conjuguées, il existe d'autres systèmes de coordonnées curvilignes, dépendant de trois fonctions arbitraires d'une seule variable, correspondant point par point, surface par surface, au système proposé et tels qu'aux points correspondants les plans tangents aux surfaces correspondantes soient parallèles.*

**1049.** On peut signaler encore d'autres propriétés géométriques se rapportant aux systèmes à lignes conjuguées. Associons au système proposé celui qui est défini par les fonctions $x_1, y_1, z_1$ satisfaisant aux trois équations

$$\left\{\begin{aligned}
x_1\frac{\partial x}{\partial\rho} + y_1\frac{\partial y}{\partial\rho} + z_1\frac{\partial z}{\partial\rho} &= \frac{\partial\theta}{\partial\rho},\\
x_1\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + y_1\frac{\partial y}{\partial\rho_1} + z_1\frac{\partial z}{\partial\rho_1} &= \frac{\partial\theta}{\partial\rho_1},\\
x_1\frac{\partial x}{\partial\rho_2} + y_1\frac{\partial y}{\partial\rho_2} + z_1\frac{\partial z}{\partial\rho_2} &= \frac{\partial\theta}{\partial\rho_2},
\end{aligned}\right. \tag{46}$$

où $\theta$ est une solution quelconque des équations (38). Si l'on tient compte de ces équations, on verra aisément que l'on peut déduire,

par la différentiation des formules précédentes, toutes les relations comprises dans la formule suivante

$$(47) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \rho_i}\frac{\partial x}{\partial \rho_k} + \frac{\partial y_1}{\partial \rho_i}\frac{\partial y}{\partial \rho_k} + \frac{\partial z_1}{\partial \rho_i}\frac{\partial z}{\partial \rho_k} = 0 \qquad (i \neq k).$$

Ces relations expriment évidemment qu'aux points correspondants des deux systèmes les plans tangents aux surfaces coordonnées forment deux trièdres supplémentaires. Comme, en faisant varier la fonction $\theta$, on obtient une infinité de systèmes $(x_1, y_1, z_1)$ pour lesquels les plans tangents sont toujours parallèles en vertu même de la propriété précédente, on voit que, dans chacun de ces nouveaux systèmes $(x_1, y_1, z_1)$, les surfaces coordonnées se coupent aussi suivant des lignes conjuguées.

Chacune des équations (46) représente le plan tangent à l'une des trois surfaces coordonnées, comme on s'en assure aisément en cherchant l'enveloppe de ce plan.

**1050.** On peut démontrer que les systèmes définis par les équations (46) sont les plus généraux parmi ceux qui correspondent au système proposé de la manière indiquée; c'est-à-dire de telle manière que toutes les équations (47) soient vérifiées. En effet, s'il en est ainsi, les plans tangents aux surfaces qui composent le système cherché seront évidemment définis par trois équations telles que les suivantes

$$(48) \qquad \begin{cases} X\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \rho} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \rho} = \lambda, \\ X\dfrac{\partial x}{\partial \rho_1} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \rho_1} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \rho_1} = \lambda_1, \\ X\dfrac{\partial x}{\partial \rho_2} + Y\dfrac{\partial y}{\partial \rho_2} + Z\dfrac{\partial z}{\partial \rho_2} = \lambda_2. \end{cases}$$

Si l'on différentie la première équation par rapport à $\rho_1$, on sera conduit, en tenant compte des équations (38) et (48), à l'identité

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \rho}\lambda_1 + \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial \rho_1}\lambda,$$

qui, jointe aux identités analogues, nous donne

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_2} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho}, \qquad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_2} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_1}.$$

On peut donc prendre pour $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ les dérivées d'une même fonction $\theta$; et cette fonction devra satisfaire aux équations (38). On retrouve donc bien les formules (46).

**1051.** Ces nouveaux systèmes donnent naissance à une équation identique de la forme suivante :

$$(49) \qquad dx_1\,\delta x + dy_1\,\delta y + dz_1\,\delta z = A\,d\rho\,\delta\rho + B\,d\rho_1\,\delta\rho_1 + C\,d\rho_2\,\delta\rho_2.$$

Le plan défini par l'équation

$$(50) \qquad Xx + Yy + Zz = \theta,$$

où X, Y, Z désignent des coordonnées courantes, donne lieu aux propriétés suivantes.

Suivant qu'on y fait varier $\rho_1$ et $\rho_2$, ou $\rho$ et $\rho_2$, ou encore $\rho$ et $\rho_1$, il enveloppe trois surfaces différentes et a, par suite, trois points de contact distincts. Pour chacun de ces points de contact, on connaît deux tangentes conjuguées de la surface correspondante : ce sont les droites qui le joignent aux deux autres points de contact. Les trois côtés du triangle formé par les points de contact sont dans les plans tangents aux trois surfaces coordonnées du système $(x_1, y_1, z_1)$. Si, donc, on prend le pôle du plan précédent relativement à une quadrique quelconque, on obtient un nouveau système de coordonnées curvilignes à lignes conjuguées.

**1052.** Ajoutons que les systèmes à lignes conjuguées permettent d'interpréter très simplement les six substitutions définies au n° **1042**. Si l'on considère au point $M(x, y, z)$ la tangente à la courbe d'intersection de deux surfaces coordonnées, par exemple de celles de paramètres $\rho_1$ et $\rho_2$, cette droite engendre trois congruences différentes suivant que l'on fait varier $\rho_1$ et $\rho_2$, ou $\rho$ et $\rho_2$, ou $\rho_1$ et $\rho$.

Ces trois congruences ne donnent sur la droite que *trois* points focaux. Par exemple, si l'on fait varier $\rho$ et $\rho_2$, c'est-à-dire si la droite se déplace en restant tangente à la surface $(\rho_1)$, les points focaux sont le point M et un autre point $M_2$. Si la droite demeure tangente à la surface $(\rho_2)$, les points focaux sont M et un autre point $M_1$ ; mais alors, si le point de contact de la droite décrit la surface $(\rho)$, les points focaux sont $M_1$ et $M_2$. Les formules par

lesquelles on passe de M aux points $M_1$, $M_2$ correspondent précisément à deux des substitutions du n° 1042. D'ailleurs, la relation établie ainsi entre M et $M_1$, ou entre M et $M_2$, fait dériver du système proposé un autre système à lignes conjuguées correspondant, point par point, surface par surface, au système donné.

1053. On pourrait ici étudier, en suivant les méthodes analytiques du Livre IV, et plus particulièrement du Chapitre VIII, les relations que présentent tous les systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues au système (5) et relatifs aux différents systèmes de coordonnées curvilignes qui sont rattachés les uns aux autres par les propositions géométriques précédentes.

Nous réserverons cette discussion pour le cas, plus important et plus simple, où les systèmes deviennent orthogonaux.

Ici les deux séries de systèmes dérivés considérées aux n$^{os}$ 1047, 1049 se ramènent à une seule et l'on peut évidemment énoncer la proposition suivante :

*Étant donné un système triple orthogonal, pour obtenir tout autre système triple admettant la même représentation sphérique, c'est-à-dire tel que les surfaces coordonnées se correspondent une à une dans les deux systèmes et qu'aux points correspondants les plans tangents aux surfaces homologues soient parallèles, il faudra former le système des trois équations linéaires de la forme* (38) *auxquelles satisfont les coordonnées $x$, $y$, $z$ considérées comme fonctions de $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$. Si $\Omega$ désigne la solution la plus générale de ce système, les équations*

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1\frac{\partial x}{\partial\rho}+y_1\frac{\partial y}{\partial\rho}+z_1\frac{\partial z}{\partial\rho}&=\frac{\partial\Omega}{\partial\rho},\\ x_1\frac{\partial x}{\partial\rho_1}+y_1\frac{\partial y}{\partial\rho_1}+z_1\frac{\partial z}{\partial\rho_1}&=\frac{\partial\Omega}{\partial\rho_1},\\ x_1\frac{\partial x}{\partial\rho_2}+y_2\frac{\partial y}{\partial\rho_2}+z_1\frac{\partial z}{\partial\rho_2}&=\frac{\partial\Omega}{\partial\rho_2}\end{aligned}\right.$$

*définiront le système cherché.*

Le système primitif correspond au cas où l'on prend pour $\Omega$ la

solution

$$\Omega = \frac{x^2+y^2+z^2}{2},$$

qui, nous l'avons vu (nos 147, 148), vérifie, dans ce cas *et dans ce cas seulement*, les trois équations (38).

**1054.** On peut encore établir comme il suit la proposition précédente.

Reprenons les quantités déjà introduites

$$U_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial u}{\partial \rho_i}, \tag{52}$$

où $u$ désigne, conformément à la notation de Lamé, une quelconque des coordonnées $x, y, z$. Les neuf quantités ainsi définies sont évidemment les cosinus directeurs des normales aux surfaces qui composent le système orthogonal; par exemple, $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ définissent la direction de la normale à la surface de paramètre $\rho_i$. Par suite, dans le cas spécial que nous envisageons, il faut introduire la relation nouvelle

$$U^2 + U_1^2 + U_2^2 = 1, \tag{53}$$

entre les trois cosinus, ce qui va nous conduire à de nouvelles relations différentielles, venant s'ajouter aux suivantes

$$\frac{\partial U_i}{\partial \rho_k} = U_k \beta_{ik} \qquad (i \neq k), \tag{54}$$

déjà établies plus haut (n° 1048). Si l'on différentie, en effet, la relation (53) en tenant compte de celles que nous venons de rappeler, on sera conduit à une relation du type suivant

$$\frac{\partial U_i}{\partial \rho_i} = -U_k \beta_{ki} - U_l \beta_{li} \qquad (i \neq k \neq l). \tag{55}$$

Ces nouvelles relations donnent naissance elles-mêmes à de nouvelles conditions d'intégrabilité; et, en égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho_i \partial \rho_k}$ que l'on peut déduire des formules (54) et (55), on est conduit à trois relations différentielles

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial \rho_k} + \beta_{li}\beta_{lk} = 0 \qquad (i \neq k \neq l), \tag{56}$$

qui viennent s'ajouter aux suivantes

$$\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial\rho_l} = \beta_{il}\beta_{lk}, \qquad (i \neq k \neq l), \tag{57}$$

déjà démontrées plus haut.

Cela posé, on peut reprendre la démonstration du n° 1048. conservant tous les $U_i$, on calcule de nouvelles quantités $H_i$ s faisant aux équations

$$\frac{\partial H_k}{\partial\rho_i} = H_i\beta_{ik} \qquad (i \neq k), \tag{58}$$

on obtiendra de nouveaux systèmes triples orthogonaux a même représentation sphérique que le système proposé ([1]).

**1055.** Revenons à notre première démonstration. On peu déduire très simplement les formules propres à définir le nou système orthogonal. Si l'on introduit, en effet, les notation Lamé déjà employées (n° 672) pour des invariants analogues l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\theta &= \left(\frac{1}{H}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2}\right)^2, \\ \Delta(\theta, \theta_1) &= \frac{1}{H^2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho} + \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_1} + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_2}, \end{aligned}\right. \tag{59}$$

les relations entre les neuf cosinus $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ nous permetten résoudre très simplement les équations (51) et nous donnent

$$x_1 = \Delta(x, \Omega), \qquad y_1 = \Delta(y, \Omega), \qquad z_1 = \Delta(z, \Omega), \tag{60}$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \Delta\Omega. \tag{61}$$

---

([1]) C'est M. E. Combescure qui, dans un Mémoire *Sur les déterminants j tionnels et les coordonnées curvilignes,* présenté en 1864 à l'Académie Sciences et inséré en 1867 au tome IV (1re série) des *Annales de l'École male supérieure,* a fait le premier la remarque que l'on peut toujours assoc un système triple orthogonal d'autres systèmes ayant, aux points correspond leurs plans tangents parallèles. On pourra consulter le § VIII de ce Mémoi aussi une Note de l'auteur, insérée en 1868 au tome LXVII, p. 1101, des *Com rendus.*

D'autre part, les relations évidentes

$$(62)\qquad \frac{\frac{\partial x_1}{\partial \rho_i}}{\frac{\partial x}{\partial \rho_i}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial \rho_i}}{\frac{\partial y}{\partial \rho_i}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial \rho_i}}{\frac{\partial z}{\partial \rho_i}}$$

nous conduisent à la suivante

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial \rho_i}}{\frac{\partial x}{\partial \rho_i}} = \frac{\mathrm{S}\, x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \rho_i}}{\mathrm{S}\, x_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_i}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial \Delta\Omega}{\partial \rho_i}}{\mathrm{S}\, x_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_i}}.$$

En tenant compte de l'une des équations (51), on obtient la formule

$$(63)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial \rho_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial \rho_i}\frac{\frac{\partial \Delta\Omega}{\partial \rho_i}}{\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_i}}.$$

Si donc on pose

$$(64)\qquad dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \mathrm{H}'^2\, d\rho^2 + \mathrm{H}_1'^2\, d\rho_1^2 + \mathrm{H}_1'^2\, d\rho_2^2,$$

on aura

$$(65)\qquad \mathrm{H}'_i = \mathrm{H}_i\, \frac{\frac{\partial \Delta\Omega}{\partial \rho_i}}{2\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_i}};$$

de sorte que le second système sera aussi complètement connu que le premier.

**1056.** Pour indiquer au moins une application, supposons le système primitif déterminé par les formules

$$\frac{x}{\rho} = \frac{y}{\rho_1} = \frac{z}{\rho_2} = \frac{1}{\rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2},$$

qui définissent une inversion. Les trois familles de surfaces coordonnées sont formées de sphères qui passent par l'origine et sont tangentes à l'un des plans coordonnés.

Le système (38) prend ici la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho_i\, \partial \rho_k} u(\rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2) = 0 \qquad (i \neq k).$$

Son intégrale générale est évidente; elle est déterminée p
l'équation

$$u(\rho^2+\rho_1^2+\rho_2^2)=R+R_1+R_2,$$

où $R_i$ dépend de la seule variable $\rho_i$. Les formules (60) no
donnent alors

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1&=2\rho\,\frac{R-\rho R'+R_1-\rho_1 R'_1+R_2-\rho_2 R'_2}{\rho^2+\rho_1^2+\rho_2^2}+R',\\ y_1&=2\rho_1\frac{R-\rho R'+R_1-\rho_1 R'_1+R_2-\rho_2 R'_2}{\rho^2+\rho_1^2+\rho_2^2}+R'_1,\\ z_1&=2\rho_2\frac{R-\rho R'+R_1-\rho_1 R'_1+R_2-\rho_2 R'_2}{\rho^2+\rho_1^2+\rho_2^2}+R'_2.\end{aligned}\right.$$

On aura de même

$$(67)\qquad H'_i=2\,\frac{R-\rho R'+R_1-\rho_1 R'_1+R_2-\rho_2 R'_2}{\rho^2+\rho_1^2+\rho_2^2}+R''_i.$$

Les surfaces coordonnées du nouveau système ont toutes leu
lignes de courbure planes. Elles appartiennent à la classe défin
par les équations (12) du n° 104.

**1057.** Revenons au cas général. Nous avons déjà remarqué q
les équations (38) auxquelles doit satisfaire la fonction $\Omega$ doive
admettre la solution particulière $x^2+y^2+z^2$. D'après cela,
suffit de répéter le raisonnement fait au n° 146 pour reconnaît
que, si l'on effectue la substitution

$$\Omega=\Omega_1(x^2+y^2+z^2),$$

les trois nouvelles équations en $\Omega_1$ seront celles auxquelles sati
feront les coordonnées $x'$, $y'$, $z'$ relatives au système orthogon
qui se déduit du premier par une inversion dont le pôle e
l'origine des coordonnées. En rapprochant ce résultat de tout
qui précède, on peut conclure la proposition suivante :

*Lorsqu'on sait déterminer tous les systèmes triples adme
tant la même représentation sphérique qu'un système orth
gonal donné, on sait résoudre le même problème pour to
les systèmes orthogonaux qui en dérivent par inversion;
cela sans aucune intégration.*

Plus exactement, *à chaque solution du premier problème correspond une solution du second et* vice versa.

Ce résultat, qui peut être considéré comme la généralisation des propositions que nous avons données dans les Chapitres précédents, relativement à la représentation sphérique des surfaces, va nous permettre d'étendre beaucoup les applications de la méthode.

Considérons, en effet, un système orthogonal (S), défini par les fonctions $x$, $y$, $z$, et supposons qu'on sache intégrer les équations (38) relatives à ce système. Si $\Omega_1$ désigne une solution quelconque de ce système, les formules

$$\text{(68)} \qquad \mathbf{S}\, x_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \rho_i} \qquad (i = 0, 1, 2)$$

définiront des fonctions $x_1$, $y_1$, $z_1$ qui feront connaître un nouveau système orthogonal ($S_1$) dérivé du premier. Or, il est évident géométriquement que les systèmes orthogonaux ayant même représentation sphérique que ($S_1$) ont aussi même représentation sphérique que (S). Donc, on saura résoudre les équations (38) relatives au système ($S_1$) comme on sait les résoudre pour le système (S). C'est d'ailleurs ce que confirme la remarque analytique suivante.

D'après les formules (60) et (63) on a, par exemple,

$$2\, dx_1 = \sum_i \frac{\partial x}{\partial \rho_i} \frac{\dfrac{\partial \Delta \Omega_1}{\partial \rho_i}}{\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \rho_i}} d\rho_i,$$

et les formules analogues pour $y_1$ et pour $z_1$. Or $x$, $y$, $z$ sont des solutions particulières du système (38) relatif à (S); et $x_1$, $y_1$, $z_1$ sont des solutions du système analogue relatif à ($S_1$). On est donc conduit à conclure que si $\Omega$ est une solution quelconque des équations relatives au système (S), il existera une fonction $\Omega'$ définie par la formule

$$\text{(69)} \qquad 2\,\Omega' = \int \sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_i} \frac{\dfrac{\partial \Delta \Omega_1}{\partial \rho_i}}{\dfrac{\partial \Omega_1}{\partial \rho_i}} d\rho_i;$$

et, de plus, cette fonction $\Omega'$ sera la solution la plus général système (38) relatif à ($S_1$). Aucun calcul n'est nécessaire pou rifier cette conclusion. Il suffit, en effet, de remarquer qu( conditions d'intégrabilité de $\Omega'$, les équations du second c auxquelles elle doit satisfaire, étant vérifiées quand on rempla par $x$, $y$ ou $z$, doivent l'être identiquement, sous la seule rés que $\Omega$ satisfasse aux mêmes équations (38) que ces solutions ticulières $x$, $y$, $z$.

Ces points étant admis, on reconnaît immédiatement la p( bilité, dès qu'on sait intégrer le système (38) relatif à un syst orthogonal (S), *d'obtenir une suite illimitée de systèmes tri orthogonaux contenant un nombre de plus en plus gran fonctions arbitraires*. Il suffira de passer de (S) à un système admettant la même représentation sphérique, puis de pre l'inverse ($S'_1$) de ($S_1$) et de recommencer sur ($S'_1$) les mê opérations que sur (S). Ces opérations introduiront seulement quadratures analogues à celle qui est définie par la formule ( quadratures qui s'effectuent d'ailleurs complètement quan système initial est complètement intégrable.

1058. Pour compléter et faciliter les applications de la thode, nous indiquerons comment on passe d'un système or gonal (S) à un système inverse (S') par rapport à l'origine coordonnées.

Soit, pour abréger,

$$\sigma = x^2 + y^2 + z^2. \tag{70}$$

Si $\Omega$ est une solution du système (38) relatif à (S), $\frac{\Omega}{\sigma}$ sera la lution *correspondante* du même système relatif à (S'). D'a part, si l'on désigne par $\Delta'$ le $\Delta$ relatif à (S') on a, comme on en prenant le module de l'inversion égal à l'unité,

$$\Delta'(0) = \sigma^2 \Delta(0).$$

Donc les formules qui définissent les fonctions $x'_1, y'_1, z'_1$ r tives au système ($S'_1$) dérivé de (S') par l'emploi de la solutio

formules qui se déduisent des équations (60), seront

$$(71)\quad \begin{cases} x'_1 = \sigma^2 \Delta\left(\dfrac{x}{\sigma}, \dfrac{\Omega}{\sigma}\right), \\ y'_1 = \sigma^2 \Delta\left(\dfrac{y}{\sigma}, \dfrac{\Omega}{\sigma}\right), \\ z'_1 = \sigma^2 \Delta\left(\dfrac{z}{\sigma}, \dfrac{\Omega}{\sigma}\right). \end{cases}$$

En appliquant les règles données au n° 679 relativement au symbole opératoire $\Delta$ et tenant compte des formules données plus haut, on trouvera

$$(72)\quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + \dfrac{2x}{\sigma}(\Omega - xx_1 - yy_1 - zz_1), \\ y'_1 = y_1 + \dfrac{2y}{\sigma}(\Omega - xx_1 - yy_1 - zz_1), \\ z'_1 = z_1 + \dfrac{2z}{\sigma}(\Omega - xx_1 - yy_1 - zz_1), \end{cases}$$

$x_1, y_1, z_1$ étant les coordonnées définies par les formules (60) et relatives au système $(S_1)$ dérivé de $(S)$ par l'emploi de la solution $\Omega$.

**1059.** Supposons, par exemple, que le système (S) soit celui qui correspond aux coordonnées polaires ayant pour origine le point $(h, k, l)$ et qui est défini par les formules

$$(73)\quad \begin{cases} x = h + \rho \sin\rho_1 \cos\rho_2, \\ y = k + \rho \sin\rho_1 \sin\rho_2, \\ z = l + \rho \cos\rho_1. \end{cases}$$

Les équations en $x, y, z$ admettront la solution générale

$$(74)\quad \Omega = R + R_1\rho + R_2\rho \sin\rho_1,$$

où $R_i$ dépend de la seule variable $\rho_i$; et les formules (60), (72) feront alors connaître, avec les trois fonctions arbitraires $R, R_1, R_2$, un système orthogonal admettant même représentation sphérique que le système inverse de (S), c'est-à-dire composé de trois familles de surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. Elles appartiennent cette fois à la classe de celles qui

sont les plus générales et qui ont été déterminées par les équations (11) du n° 104.

On pourra poursuivre l'application de la méthode et introduire autant de fonctions arbitraires qu'on le voudra, sans aucun signe d'intégration.

1060. Pour obtenir des applications très générales, nous choisirons la série admettant comme système initial (S) celui qui a été déjà déterminé plus haut (n° 971) et pour lequel les lignes d'intersection des surfaces de paramètres $\rho$ et $\rho_1$, par exemple, sont des courbes planes (K). On peut d'ailleurs le retrouver, comme nous l'avons indiqué (note du n° 972), par la méthode suivante :

Si nous construisons les cercles osculateurs (C) aux différentes lignes (K), au point où elles sont coupées par une surface déterminée de paramètre $\rho_2$, tous les cercles (C) forment un système cyclique, d'après la proposition de Ribaucour (n° 972). Nous avons donc deux systèmes orthogonaux : (S) et le système cyclique. Faisons correspondre à chaque courbe (K) le cercle (C) de son plan; il est clair que les surfaces de paramètres $\rho$ et $\rho_1$ se correspondront dans les deux systèmes. Mais si, de plus, on associe à chaque point M de (K) le point $M_1$ de (C) où la tangente est parallèle à celle de (K), les surfaces de paramètres $\rho$ et $\rho_1$ se correspondront par plans tangents parallèles dans les deux systèmes orthogonaux; et, comme ce sont leurs lignes de courbure qui forment le système conjugué commun, on voit que les surfaces de paramètre $\rho_2$ se correspondront aussi dans les deux systèmes orthogonaux : par suite, ces deux systèmes *auront la même représentation sphérique* dans le sens précis défini plus haut. On obtiendra donc les systèmes (S) en cherchant tous ceux qui admettent même représentation sphérique que le système cyclique le plus général.

Or nous avons donné au Livre IV, Ch. XV, toutes les formules nécessaires, relatives au système cyclique $(C_0)$ formé de cercles normaux à une surface quelconque (A). Conservons toutes les notations adoptées : $x, y, z$ désignant les coordonnées d'un point de la surface (A) (n° 481); $c, c', c''$ les cosinus directeurs de la normale à la surface en ce point; X, Y, Z les coordonnées du

point du cercle (C) dans le système cyclique; $\lambda$ et $\mu$ deux fonctions de $\rho$ et $\rho_1$ vérifiant le système (54) [II, p. 339], on aura, d'après les équations (66) [II, p. 342]

$$(75)\quad \frac{\partial X}{\partial \rho} = \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\left[X - x + \lambda \frac{\frac{\partial c}{\partial \rho}}{\frac{\partial \mu}{\partial \rho}}\right], \qquad \frac{\partial X}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1}\left[X - x + \lambda \frac{\frac{\partial c}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial \mu}{\partial \rho_1}}\right];$$

de sorte que, pour former les équations aux dérivées partielles de la forme (38) dont X, Y, Z sont des solutions particulières, il suffira d'employer ces deux formules et d'en éliminer $x$ et $c$, en tenant compte uniquement de ce fait que $x$ et $c$ sont des solutions particulières du système (54) [II, p. 339], solutions qui ne dépendent pas de $\rho_2$. On déduit de là qu'il est inutile de former ces équations aux dérivées partielles et que l'on aura immédiatement leur intégrale générale en cherchant la fonction $\Omega$ qui satisfait aux deux équations du premier ordre

$$(76)\quad \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\left[\Omega - \lambda_0 + \lambda \frac{\frac{\partial \mu_0}{\partial \rho}}{\frac{\partial \mu}{\partial \rho}}\right], \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1}\left[\Omega - \lambda_0 + \lambda \frac{\frac{\partial \mu_0}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial \mu}{\partial \rho_1}}\right],$$

où $\lambda_0$, $\mu_0$ sont les fonctions les plus générales de $\rho$ et de $\rho_1$ satisfaisant aux équations (54), que nous reproduisons ici,

$$(77)\quad \frac{\partial \lambda_0}{\partial \rho} + R\frac{\partial \mu_0}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda_0}{\partial \rho_1} + R_1\frac{\partial \mu_0}{\partial \rho_1} = 0.$$

Par exemple, en adoptant les solutions suivantes

$$\lambda_0 = \lambda'_0 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \qquad \mu_0 = \mu'_0 = cx + c'y + c''z,$$

on trouverait que l'on peut prendre pour $\Omega$ la valeur

$$\Omega = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2}.$$

Nous ferons usage de cette remarque.

L'intégration des deux équations simultanées (76) se fait à vue;

elle nous donne

$$\frac{\Omega}{\theta} = f(\rho_2) + \int \frac{\partial\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\partial\rho}\left(\lambda_0 - \lambda\frac{\frac{\partial\mu_0}{\partial\rho}}{\frac{\partial\mu}{\partial\rho}}\right)d\rho + \frac{\partial\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\partial\rho_1}\left(\lambda_0 - \lambda\frac{\frac{\partial\mu_0}{\partial\rho_1}}{\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}}\right)d\rho_1.$$

Après quelques transformations simples et en tenant compte de la formule (65) [II, p. 342], on peut écrire

$$(78)\qquad \Omega = \lambda_0 + [\rho_2\mu_0 + f(\rho_2)]\theta + \theta\int \frac{\frac{\partial K}{\partial\rho}}{\frac{\partial\mu}{\partial\rho}}\frac{\partial\mu_0}{\partial\rho}d\rho + \frac{\frac{\partial K}{\partial\rho_1}}{\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}}\frac{\partial\mu_0}{\partial\rho_1}d\rho_1,$$

en posant, pour abréger,

$$(79)\qquad 2K = \mu^2 + \frac{1}{e}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}\right)^2.$$

Les formules qui déterminent alors le système cherché sont les suivantes

$$(80)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{S}\, x_1\left(\mathrm{X} - x + \lambda\frac{\frac{\partial c}{\partial\rho}}{\frac{\partial\mu}{\partial\rho}}\right) = \Omega - \lambda_0 + \lambda\frac{\frac{\partial\mu_0}{\partial\rho}}{\frac{\partial\mu}{\partial\rho}},\\
&\mathrm{S}\, x_1\left(\mathrm{X} - x + \lambda\frac{\frac{\partial c}{\partial\rho_1}}{\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}}\right) = \Omega - \lambda_0 + \lambda\frac{\frac{\partial\mu_0}{\partial\rho_1}}{\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}},\\
&\mathrm{S}\, x_1\left(\mathrm{X} - x + \frac{c\lambda}{\mu + \rho_2}\right) = \Omega - \lambda_0 + \lambda\frac{\mu_0 + f'(\rho_2)}{\mu + \rho_2}.
\end{aligned}\right.$$

Ce système $(S_1)$, défini par les fonctions $x_1, y_1, z_1$, est le plus général de ceux qui correspondent par plans tangents parallèles au système cyclique donné $(C_0)$. Mais, si l'on veut se borner à obtenir le système le plus général à lignes de courbure planes dans un système, il résulte du raisonnement qui a été notre point de départ qu'au lieu de garder le système $(S_1)$, on peut se contenter de déterminer le système particulier $(S_0)$ pour lequel les lignes de courbure planes (K) sont dans les plans des cercles (C) correspondants.

Or on obtient ici le plan de chaque ligne (K) en retranchant membre à membre les deux premières équations (80); car cette

opération élimine $\rho_2$. On trouve ainsi l'équation

$$\mathrm{S}\, x_1 \left( \frac{\frac{\partial c}{\partial \rho}}{\frac{\partial \mu}{\partial \rho}} - \frac{\frac{\partial c}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial \mu}{\partial \rho_1}} \right) = \frac{\frac{\partial \mu_0}{\partial \rho}}{\frac{\partial \mu}{\partial \rho}} - \frac{\frac{\partial \mu_0}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial \mu}{\partial \rho_1}};$$

et il n'y a plus qu'à exprimer que cette équation définit le plan du cercle (C), c'est-à-dire qu'elle est vérifiée quand on y remplace $x_1, y_1, z_1$ par $x, y, z$. On trouve ainsi la condition

$$\frac{\partial \mu}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho}(\mu_0 - cx - c'y - c''z) - \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho_1}(\mu_0 - cx - c'y - c''z) = 0,$$

qui nous donnerait, d'une manière générale,

$$\mu_0 = cx + c'y + c''z + C\mu + C_1,$$

C et $C_1$ désignant deux constantes quelconques. En se reportant, par exemple, à l'expression de $\Omega$ qui précède la formule (78), on reconnaîtra qu'on peut réduire ces constantes à zéro sans diminuer la généralité, et prendre simplement

$$(81) \qquad \mu_0 = \mu'_0 = cx + c'y + c''z, \qquad \lambda_0 = \lambda'_0 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

Dans ce cas, l'intégrale qui figure dans l'expression de $\Omega$ disparaît et l'on peut prendre

$$(82) \quad \begin{cases} \Omega_0 = \dfrac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2} + \theta f_0(\rho_2) \\ \quad = \theta[f_0(\rho_2) - \lambda + \mu\mu'_0 + \mu'_0 \rho_2] + \lambda'_0 + \dfrac{\theta}{e} \dfrac{\partial \mu}{\partial \rho} \dfrac{\partial \mu'_0}{\partial \rho} + \dfrac{\theta}{g} \dfrac{\partial \mu}{\partial \rho_1} \dfrac{\partial \mu'_0}{\partial \rho_1}. \end{cases}$$

Les formules (80) nous donnent donc, pour le système ($S_1$), les équations suivantes :

$$(83) \quad \begin{cases} \mathrm{S}(x_0 - x)\left( X - x + \lambda \dfrac{\frac{\partial c}{\partial \rho}}{\frac{\partial \mu}{\partial \rho}} \right) = \theta[f_0(\rho_2) - \lambda], \\ \mathrm{S}(x_0 - x)\left( X - x + \lambda \dfrac{\frac{\partial c}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial \mu}{\partial \rho_1}} \right) = \theta[f_0(\rho_2) - \lambda], \\ \mathrm{S}(x_0 - x)\left( X - x + \dfrac{c\lambda}{\mu + \rho_2} \right) = \theta[f_0(\rho_2) \quad \lambda] + \dfrac{\lambda f'_0(\rho_2)}{\mu + \rho_2}, \end{cases}$$

où tout est connu et où l'on a remplacé, pour plus de netteté dans la suite du raisonnement, $x_1, y_1, z_1$ par $x_0, y_0, z_0$.

On aurait pu aussi garder les formules générales (80), en supposant que la surface (A) se réduise à une sphère.

**1061.** Si l'on veut appliquer la méthode de récurrence indiquée plus haut au système $(S_0)$ que nous venons de déterminer, il faudra prendre d'abord l'inverse de ce système, ce qui donnera un système $(S'_0)$ pour lequel les lignes d'intersection des surfaces de paramètres $\rho$, $\rho_1$ seront sphériques; mais les sphères contenant ces lignes passeront par un point fixe. On déterminera ensuite tous les systèmes ayant même représentation sphérique que $(S'_0)$. Nous allons établir d'abord que, parmi ces nouveaux systèmes, se trouvent tous ceux pour lesquels les surfaces appartenant à deux familles déterminées se coupent suivant des courbes sphériques. En d'autres termes, sur les trois familles de courbes d'intersection du système orthogonal, une seule sera assujettie à être sphérique.

Pour établir ce résultat, nous remarquerons qu'on exprime la propriété cherchée en écrivant que les coordonnées $x, y, z$ du système orthogonal vérifient une équation de la forme suivante :

$$(84) \qquad \mathbf{S}(x-\alpha)^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2,$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $r$ sont des fonctions des *seules* variables $\rho$ et $\rho_1$. Pour abréger, nous écrirons aussi, sans les déduire de la précédente, les équations

$$(85) \qquad \begin{cases} \mathbf{S}(x-\alpha)X_2 = 0, \\ \mathbf{S}(x-\alpha)X_1 = u, \\ \mathbf{S}(x-\alpha)X \;\; = v, \end{cases}$$

où $u$ et $v$ sont encore des fonctions de $\rho$ et de $\rho_1$ assujetties à vérifier la relation

$$(86) \qquad u^2 + v^2 = r^2;$$

la première est évidente, les deux autres expriment que les sur-

faces de paramètres $\rho_1$ et $\rho$ coupent la sphère contenant la ligne de courbure commune sous des angles dont les cosinus $\frac{u}{r}$ et $\frac{v}{r}$ ne dépendent pas de $\rho_2$.

Différentions la seconde formule (85) par rapport à $\rho$. On trouve, en tenant compte des formules (54), la relation

$$-\mathbf{S}\, X_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} + \beta_{10} v = \frac{\partial u}{\partial \rho},$$

à laquelle on peut joindre la suivante

$$-\mathbf{S}\, X \frac{\partial \alpha}{\partial \rho_1} + \beta_{01} u = \frac{\partial v}{\partial \rho_1},$$

obtenue en échangeant les indices o et 1. Si l'on pose

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = v \varepsilon_1, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho_1} = u \varepsilon, \tag{87}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho} = A v, & \dfrac{\partial \beta}{\partial \rho} = B v, & \dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho} = C v, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho_1} = A_1 u, & \dfrac{\partial \beta}{\partial \rho_1} = B_1 u, & \dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho_1} = C_1 u, \end{cases} \tag{88}$$

ces deux relations deviendront

$$\mathbf{S}\, A X_1 = \beta_{10} - \varepsilon_1, \qquad \mathbf{S}\, A_1 X = \beta_{01} - \varepsilon. \tag{89}$$

En différentiant les deux membres par rapport à $\rho_2$ et remplaçant toujours les dérivées de $X$, $X_1$ par leurs valeurs, on en déduit les deux suivantes

$$\mathbf{S}\, A X_2 = \beta_{20}, \qquad \mathbf{S}\, A_1 X_2 = \beta_{21}. \tag{90}$$

Continuons encore et différentions la première de ces relations par rapport à $\rho_1$. Il viendra

$$\mathbf{S} \frac{\partial A}{\partial \rho_1} X_2 + \beta_{21} \mathbf{S}\, A X_1 = \beta_{21} \beta_{10},$$

ou, en remplaçant $\mathbf{S}\, A X_1$ par sa valeur (89),

$$\mathbf{S} \frac{\partial A}{\partial \rho_1} X_2 = \varepsilon_1 \beta_{21} = \varepsilon_1 \mathbf{S}\, A_1 X_2.$$

Si les coefficients de $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ n'étaient pas égaux dans deux membres, l'équation précédente exprimerait que, p chaque ligne de courbure sphérique, la tangente est parallè un plan déterminé; c'est-à-dire que cette ligne se réduit à cercle. C'est une hypothèse que nous pouvons écarter, et il par suite, permis d'écrire les trois relations

$$(91)\qquad \frac{\partial A}{\partial \rho_1} = \varepsilon_1 A_1, \qquad \frac{\partial B}{\partial \rho_1} = \varepsilon_1 B_1, \qquad \frac{\partial C}{\partial \rho_1} = \varepsilon_1 C_1,$$

auxquelles on devra joindre les suivantes

$$(92)\qquad \frac{\partial A_1}{\partial \rho} = \varepsilon A, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial \rho} = \varepsilon B, \qquad \frac{\partial C_1}{\partial \rho} = \varepsilon C,$$

que l'on en déduit en permutant $\rho$ et $\rho_1$.

Pour obtenir toutes les relations qui nous seront nécessai nous n'avons plus qu'à ajouter les deux équations (89), après a différentié la première par rapport à $\rho_1$ et la seconde par rapp à $\rho$, ce qui, en tenant compte de la formule (56) et des relati (91), (92), nous donnera

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \rho_1} = \mathrm{S}\, AX \,\mathrm{S}\, A_1X + \mathrm{S}\, AX_1 \,\mathrm{S}\, A_1X_1 + \mathrm{S}\, AX_2 \,\mathrm{S}\, A_1X_2,$$

ou encore

$$(93)\qquad AA_1 + BB_1 + CC_1 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \rho_1}.$$

**1062.** Toutes les relations (89) à (93) auxquelles nous av été conduits se rapportent à la représentation sphérique des s tèmes orthogonaux cherchés. En les combinant et les differ tiant, on en déduirait d'autres; on pourrait même supposer qu'e conduisent à de nouvelles relations entre les A et les $\varepsilon$. Leur tégration est loin de paraître facile; mais il est inutile de l'ent prendre. Il nous suffit de savoir qu'il existe des systèmes thogonaux à lignes de courbure sphériques dans un système que nous avons entièrement éliminé des relations finales les fo tions $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $u$, $v$; de sorte que, lorsqu'on aura un système de leurs pour les huit fonctions de $\rho$ et de $\rho_1$, A, $A_1$, ..., $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, tou les fonctions $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $u$ et $v$ qui satisferont aux équations (87), (

conviendront à des systèmes orthogonaux admettant une famille de lignes de courbure sphériques. Comme les conditions d'intégrabilité sont remplies pour les équations (88) en vertu des relations (87) et (91), on voit que les fonctions $u$ et $v$ se détermineront par l'intégration des deux équations (87); puis les coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ du centre de la sphère contenant la ligne de courbure sphérique seront données par les quadratures suivantes

$$(94)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \int \mathrm{A} v\, d\rho + \mathrm{A}_1 u\, d\rho_1, \\ \beta &= \int \mathrm{B} v\, d\rho + \mathrm{B}_1 u\, d\rho_1, \\ \gamma &= \int \mathrm{C} v\, d\rho + \mathrm{C}_1 u\, d\rho_1. \end{aligned}\right.$$

Ainsi :

*Toutes les fois qu'il existe un système orthogonal à lignes de courbure sphériques dans un système, il y a une infinité de systèmes analogues dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable et admettant la même représentation sphérique que le système proposé.*

**1063.** Nous allons compléter cette proposition en montrant que, parmi ces systèmes associés au premier, il en existe pour lesquels les sphères qui contiennent les lignes de courbure passent par un point fixe et qui, par suite, peuvent être considérés comme les inverses de ceux que nous avons déterminés plus haut (n° 971).

Pour cela, il faut montrer que l'on peut satisfaire à la fois aux équations (87), (94) et à la relation

$$(95)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - u^2 - v^2 = 0,$$

par laquelle on exprime que la sphère contenant la ligne de courbure passe par l'origine des coordonnées.

Si l'on différentie l'équation précédente par rapport à $\rho$ et à $\rho_1$, on obtient les deux relations

$$(96)\qquad \left\{\begin{aligned} u\varepsilon_1 + \frac{\partial v}{\partial \rho} &= \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma, \\ v\varepsilon + \frac{\partial u}{\partial \rho_1} &= \mathrm{A}_1\alpha + \mathrm{B}_1\beta + \mathrm{C}_1\gamma. \end{aligned}\right.$$

Mais si l'on différentie la première de ces équations par rapport à $\rho_1$, ou la seconde par rapport à $\rho$, on n'obtient pas d'équation nouvelle, *en vertu de la formule* (93). Cela suffit à montrer qu'il y aura des solutions communes aux équations (87), (95) et (96). Au reste, voici comment on pourra les obtenir. La différentiation des équations (96) donnera les deux équations

$$(97)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\rho}\left(u\varepsilon_1 + \frac{\partial v}{\partial\rho}\right) = (A^2 + B^2 + C^2)v + \mathbf{S}\frac{\partial A}{\partial\rho}\alpha, \\ &\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(v\varepsilon + \frac{\partial u}{\partial\rho_1}\right) = (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)u + \mathbf{S}\frac{\partial A_1}{\partial\rho_1}\alpha. \end{aligned} \right.$$

En éliminant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entre les cinq équations (95), (96), (97), on aura deux équations du second ordre en $u$ et $v$, qui, jointes aux précédentes (87), formeront un système *complet*.

**1064.** Il est ainsi établi que tout système orthogonal à lignes de courbure sphériques a même représentation sphérique qu'un système analogue, pour lequel les sphères contenant les lignes de courbure passent par un point fixe, et qu'il pourra, par suite, être obtenu par l'application de notre méthode générale de dérivation aux systèmes orthogonaux, déterminés plus haut, pour lesquels les lignes de courbure sont planes dans un système. Nous terminerons ce Chapitre en développant cette application. Et, à cet effet, nous nous appuierons sur la remarque suivante :

Soit $(S'_1)$ le système cherché, défini par les fonctions $x'_1$, $y'_1$, $z'_1$ de $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$; soit $(S'_0)$ l'un quelconque de ceux qui admettent même représentation sphérique, défini de même par les expressions des coordonnées $x'_0$, $y'_0$, $z'_0$. $(S'_1)$ sera déterminé par les trois équations

$$(98)\qquad \mathbf{S}\, x'_1 \frac{\partial x'_0}{\partial\rho_i} = \frac{\partial\Omega'}{\partial\rho_i} \qquad (i = 0, 1, 2),$$

où $\Omega'$ est une solution convenablement choisie des trois équations auxquelles satisfont $x'_0$, $y'_0$, $z'_0$. Comme on a, par hypothèse,

$$(99)\qquad (x_1 - \alpha)^2 + (y'_1 - \beta)^2 + (z'_1 - \gamma)^2 = r^2,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $r$ étant des fonctions qui ne dépendent pas de $\rho_2$, la diffé-

entiation par rapport à $\rho_2$ nous donnera

$$\mathbf{S}(x'_1-\alpha)\frac{\partial x'_1}{\partial \rho_2}=0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\mathbf{S}(x'_1-\alpha)\frac{\partial x'_0}{\partial \rho_2}=0.$$

L'équation (98), écrite pour $i=\rho_2$, prendra donc la forme suivante

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \rho_2}=\mathbf{S}\alpha\frac{\partial x'_0}{\partial \rho_2},$$

l'où l'on déduit, en intégrant,

(100) $$\Omega'=\alpha x'_0+\beta y'_0+\gamma z'_0+\zeta,$$

$\zeta$ ne dépendant pas non plus de $\rho_2$. Réciproquement, la condition précédente, qui est nécessaire, est aussi suffisante, comme on le reconnaît facilement en reprenant en sens inverse la suite du raisonnement.

1065. Ce point étant démontré, choisissons pour le système $(S'_0)$ l'inverse de celui que nous avons désigné par $(S_0)$ et qui est défini par les formules (82), (83). En posant alors

(101) $$\sigma_0=x_0^2+y_0^2+z_0^2,$$

on aura

(102) $$x'_0=\frac{x_0}{\sigma_0},\qquad y'_0=\frac{y_0}{\sigma_0},\qquad z'_0=\frac{z_0}{\sigma_0}.$$

On pourra prendre pour $\Omega'$ le quotient

$$\Omega'=\frac{\Omega''}{\sigma_0},$$

$\Omega''$ étant la solution par laquelle on passe de $(S_0)$ au système de même représentation sphérique $(S_1)$ défini par les formules (78) et (80); de sorte que l'on aura (n° 1057)

(103) $$\Omega'=\frac{\Omega''}{\sigma_0}=\frac{1}{\sigma_0}\int\sum_i\frac{\dfrac{\partial\,\Delta\Omega_0}{\partial\rho_i}}{2\dfrac{\partial\Omega_0}{\partial\rho_i}}\frac{\partial\Omega}{\partial\rho_i}\,d\rho_i,$$

$\Omega$ étant la fonction définie par la formule (78) et le symbole $\Delta$ se rapportant au système cyclique $(C_0)$ (n° 1060) d'où sont déduits à la fois $(S_0)$ et $(S_1)$. L'équation (100) qu'il s'agit de vérifier prend donc la forme

$$\Omega'' = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \zeta\sigma_0. \tag{104}$$

En la différentiant par rapport à $\rho_2$ et utilisant les équations telles que les suivantes

$$\frac{\partial x_0}{\partial \rho_2} = \frac{\dfrac{\partial\, \Delta\Omega_0}{\partial \rho_2}}{2\dfrac{\partial \Omega_0}{\partial \rho_2}} \frac{\partial X}{\partial \rho_2}, \qquad \sigma_0 = \Delta\Omega_0,$$

démontrées plus haut d'une manière générale, on trouve, après la suppression du facteur $\frac{\partial\, \Delta\Omega_0}{\partial \rho_0}$, la condition

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} = \alpha \frac{\partial X}{\partial \rho_2} + \beta \frac{\partial Y}{\partial \rho_2} + \gamma \frac{\partial Z}{\partial \rho_2} + 2\zeta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \rho_2}. \tag{105}$$

Réciproquement, si cette équation est vérifiée, on en déduira, en remontant la suite du raisonnement, l'équation un peu plus générale que la précédente (104)

$$\Omega'' = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \zeta\sigma_0 + \eta,$$

où $\eta$ ne dépend pas de $\rho_2$. Mais, comme le système $(S_0)$ a ses lignes de courbure planes, il y aura entre $x_0$, $y_0$, $z_0$ une relation linéaire ne dépendant pas de $\rho_2$, qui permettra toujours de ramener la relation précédente à la forme (104); de sorte que l'on peut regarder les équations (104) et (105) comme absolument équivalentes.

Or l'équation (105) peut évidemment être remplacée par la suivante

$$\Omega = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + 2\zeta\Omega_0 + \delta, \tag{106}$$

$\delta$ étant indépendant de $\rho_2$ comme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ....

D'autre part, si l'on remplace $\Omega$, $\Omega_0$, par leurs valeurs, données plus haut (n° 1060), et X, Y, Z par leurs valeurs données au n° 482, la relation à vérifier, divisée par $\theta$, se ramène à la forme

suivante

$$(107) \qquad f(\rho_2) - 2\zeta f_0(\rho_2) = M\rho_2^2 + N\rho_2 + P,$$

où M, N, P ne dépendent pas de $\rho_2$.

Pour que cette équation ait lieu identiquement, il faudra, comme on le reconnaît par la différentiation, que $\zeta$ se réduise à une constante. Les formules (103) et (104) montrent même que cette constante disparaîtra dans les dérivées de $\Omega'$, qui interviennent seules pour la définition du système cherché. On peut donc supposer

$$\zeta = 0;$$

et il faudra alors que la fonction $f(\rho_2)$ se réduise à un polynôme du second degré en $\rho_2$. En égalant ensuite à zéro les coefficients des puissances de $\rho_2$, on trouvera trois équations qui établiront les relations nécessaires entre les fonctions arbitraires $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\eta$.

Comme il fallait s'y attendre, la solution précédente exige l'intégration des deux équations aux dérivées partielles (77), intégration qui était déjà requise pour la détermination des systèmes à lignes de courbure planes et qui équivaut à la détermination des surfaces admettant même représentation sphérique que la surface (A).

# CHAPITRE XIII.

## NOUVELLES CLASSES DE SURFACES APPLICABLES.

Ce Chapitre est consacré à l'exposition des résultats nouveaux que l'on doit à M. Weingarten dans la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée. — La méthode de M. Weingarten exige que l'on connaisse déjà au moins une surface réelle ou imaginaire admettant l'élément linéaire donné. — Elle fait dépendre la détermination de toutes les surfaces $(\Theta)$ admettant cet élément linéaire de celle d'autres surfaces $(\Sigma)$, satisfaisant à une certaine équation aux dérivées partielles, qui établit une relation entre les rayons de courbure principaux, les distances d'un point fixe au plan tangent et au point de contact. — Cas particulier où les caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles sont les lignes de longueur nulle de la représentation sphérique de $(\Sigma)$. — L'élément linéaire est alors défini par la formule simple

$$ds^2 = du^2 + 2[u + \psi'(v)]\, dv^2,$$

et l'équation à intégrer prend la forme simple

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\, \partial\beta} = \frac{\psi''(v)}{(1+\alpha\beta)^2}.$$

Indication des différentes formes de $\psi'(v)$ pour lesquelles l'intégration est possible. — Démonstration de différents résultats dus à MM. Weingarten, Baroni, Goursat. — Les cas les plus intéressants font connaître toutes les surfaces applicables sur le paraboloïde du second degré dont une génératrice rectiligne est tangente au cercle de l'infini. — Réduction de l'élément linéaire de ces surfaces à la forme de Liouville qui permet l'intégration des lignes géodésiques.

---

1066. Nous pouvons maintenant rattacher aux propositions des Chapitres précédents une méthode singulière par laquelle M. Weingarten a obtenu de nouveaux succès dans la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée [1]. L'éminent

---

[1] J. Weingarten, *Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. Extrait d'une lettre à M. Darboux* (*Comptes rendus*, t. CXII, p. 607 et 706; mars 1891).

On pourra consulter aussi une Note de M. Goursat, insérée au même Recueil, p. 707, et un Mémoire plus étendu du même auteur *Sur un théorème de M. Weingarten et sur la théorie de surfaces applicables*, publié en 1891, au tome V des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

géomètre ne nous a pas fait connaître quels sont les principes qui lui ont servi de guide. Nous espérons que l'exposition suivante expliquera dans une certaine mesure pourquoi, appliquée à certains cas spéciaux, elle devait réussir.

Nous avons vu que les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles des surfaces applicables sur une surface donnée sont les lignes asymptotiques de ces surfaces. Par suite, toutes les fois qu'il sera possible, sinon de déterminer ces lignes asymptotiques, tout au moins d'en indiquer certaines propriétés particulières, le problème pourra être formulé d'une manière nouvelle et conduire ainsi à quelque résultat nouveau. La considération du système conjugué commun à deux surfaces applicables l'une sur l'autre va nous permettre d'appliquer cette remarque générale.

Nous commencerons par supposer que nous ayons une solution particulière du problème, c'est-à-dire que nous connaissions une surface admettant un élément linéaire donné. Si $x_1$, $y_1$, $z_1$ sont les coordonnées d'un point de cette surface $(\Theta_1)$, l'élément linéaire sera déterminé par l'équation

$$ds^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2. \tag{1}$$

Posons

$$x_1 = u, \qquad y_1 + iz_1 = v, \qquad y_1 - iz_1 = 2w, \tag{2}$$

$w$ pourra être considérée comme une fonction de $u$ et de $v$, dont nous écrirons la différentielle sous la forme classique

$$dw = p\,du + q\,dv; \tag{3}$$

et l'élément linéaire considéré prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + 2\,dv\,dw = du^2 + 2p\,du\,dv + 2q\,dv^2, \tag{4}$$

qui est précisément celle qui sert de point de départ à M. Weingarten.

La manière même dont nous y sommes conduits montre qu'on pourra la reproduire, une fois obtenue, avec six constantes arbitraires, en effectuant sur $x_1$, $y_1$, $z_1$ une substitution linéaire orthogonale quelconque. Il est vrai que la relation entre $u$, $v$, $w$ contient des imaginaires lorsque la surface $(\Theta_1)$ est réelle; mais ici encore, on pourra utiliser ces solutions signalées au n° 704,

et pour lesquelles deux des coordonnées $x_1$, $y_1$, $z_1$ sont des fonctions réelles, la troisième étant une imaginaire pure. Si c'est $z_1$, par exemple, qui est purement imaginaire, on reconnaît immédiatement sur les formules (2) que $w$ sera une fonction réelle des variables réelles $u$ et $v$. Les substitutions orthogonales auxquelles on a le droit de soumettre $x_1$, $y_1$, $z_1$ pourront alors revêtir une forme réelle quand on y remplacera ces coordonnées par leurs expressions en $u$, $v$, $w$.

1067. Soient maintenant $x, y, z$ les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface ($\Theta$) qu'il s'agit d'obtenir et qui est applicable sur la surface ($\Theta_1$). Si l'on fait rouler la surface ($\Theta_1$) sur la surface ($\Theta$), une droite isotrope invariablement liée à ($\Theta_1$) coupera le plan de contact de ($\Theta$) et de ($\Theta_1$) suivant un point dont le lieu géométrique sera une de ces surfaces ($\Sigma'$) pour lesquelles les lignes de courbure correspondent au système conjugué commun à ($\Theta$) et à ($\Theta_1$). Prenons la droite isotrope particulière ($d$) qui, rapportée aux axes invariablement liés à ($\Theta_1$), est représentée par les équations

$$x_1 = 0, \qquad y_1 + i z_1 = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire par les suivantes

$$u = 0, \qquad v = 0; \tag{6}$$

et proposons-nous de déterminer les coordonnées X', Y', Z' du point où elle coupe le plan de contact de ($\Theta$) et de ($\Theta_1$). Pour cela nous appliquerons la méthode donnée au n° 968; les coordonnées cherchées sont évidemment de la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} X' &= x + A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v}, \\ Y' &= y + A\frac{\partial y}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial v}, \\ Z' &= z + A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

A et B étant des coefficients indépendants du choix des axes. Par conséquent, les surfaces ($\Theta$), ($\Theta_1$) étant applicables l'une sur l'autre, on pourra appliquer ces formules aux axes $O_1 x_1$,

$O_1 y_1$, $O_1 z_1$, auxquels est rapportée la surface $(\Theta_1)$, *sans changer la valeur de* A *et de* B. On aura donc

$$(8)\qquad \begin{cases} X'_1 = x_1 + A\dfrac{\partial x_1}{\partial u} + B\dfrac{\partial x_1}{\partial v}, \\ Y'_1 = y_1 + A\dfrac{\partial y_1}{\partial u} + B\dfrac{\partial y_1}{\partial v}, \\ Z'_1 = z_1 + A\dfrac{\partial z_1}{\partial u} + B\dfrac{\partial z_1}{\partial v}. \end{cases}$$

Les équations de la droite isotrope $(d)$ nous donnent

$$X'_1 = 0, \qquad Y'_1 + iZ'_1 = 0,$$

et l'on a d'ailleurs, en vertu de la définition de $u$ et de $v$,

$$x_1 = u, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = 1, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0,$$

$$y_1 + iz_1 = v, \qquad \frac{\partial(y_1 + iz_1)}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial(y_1 + iz_1)}{\partial v} = 1;$$

il viendra donc

$$A = -u, \qquad B = -v,$$

de sorte que les coordonnées du point de $(\Sigma')$ seront déterminées par les formules

$$(9)\qquad \begin{cases} X' = x - u\dfrac{\partial x}{\partial u} - v\dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ Y' = y - u\dfrac{\partial y}{\partial u} - v\dfrac{\partial y}{\partial v}, \\ Z' = z - u\dfrac{\partial z}{\partial u} - v\dfrac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

Il est très aisé de déterminer les cosinus directeurs C, C′, C″ de la normale à $(\Sigma')$. Si l'on différentie, en effet, les formules précédentes, on trouve

$$(10)\qquad \begin{cases} dX' = -u\, d\dfrac{\partial x}{\partial u} - v\, d\dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ dY' = -u\, d\dfrac{\partial y}{\partial u} - v\, d\dfrac{\partial y}{\partial v}, \\ dZ' = -u\, d\dfrac{\partial z}{\partial u} - v\, d\dfrac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

Comme on doit avoir

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + 2p\,du\,dv + 2q\,dv^2,$$

il viendra

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1,\\ &\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = p,\\ &\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 2q,\end{aligned}\right.$$

et l'on déduira de là, eu égard à l'équation (3), les deux relations identiques

$$(12)\qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\,d\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\,d\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

qui, rapprochées des formules (10), nous permettent de prendre pour les cosinus directeurs de la normale à la surface $(\Sigma')$ les valeurs suivantes :

$$(13)\qquad C = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad C' = \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad C'' = \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Ces valeurs de C, C′, C″ subsisteraient sans modification si l'on substituait à la surface $(\Sigma')$ la surface plus générale $(\Sigma'')$ définie par les formules

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} X'' &= x - (u - u_0)\frac{\partial x}{\partial u} - (v - v_0)\frac{\partial x}{\partial v},\\ Y'' &= y - (u - u_0)\frac{\partial y}{\partial u} - (v - v_0)\frac{\partial y}{\partial v},\\ Z'' &= z - (u - u_0)\frac{\partial z}{\partial u} - (v - v_0)\frac{\partial z}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

où $u_0$, $v_0$ désignent deux constantes quelconques. Au reste, la surface $(\Sigma'')$ est de même définition que $(\Sigma')$; elle est décrite par le point où la droite isotrope $(d'')$ parallèle à $(d)$ et définie par les équations

$$x_1 = u_0, \qquad y_1 + iz_1 = v_0,$$

coupe le plan de contact de $(\Theta)$ et de $(\Theta_1)$. Tous ces résultats sont en parfait accord avec ceux qui ont été démontrés au Chapitre VI de ce Livre. Toutes les surfaces $(\Sigma'')$ ont, aux points cor-

respondants, leurs plans tangents parallèles; car, pour chacune d'elles, ce plan tangent est le plan projetant la droite isotrope correspondante. Elles ont de plus même représentation sphérique de leurs lignes de courbure (n° 947); et ces lignes de courbure correspondent aux courbes du système conjugué commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$.

Introduisons ici la définition suivante : étant données plusieurs surfaces qui se correspondent point par point, désignons sous le nom de *résultante* de ces surfaces celle qu'on obtient en ajoutant géométriquement les rayons vecteurs qui joignent un point fixe de l'espace aux points correspondants des surfaces données. Il est clair que la surface $(\Sigma'')$ la plus générale sera la résultante de la surface $(\Sigma')$ et de deux autres surfaces homothétiques aux suivantes $(\Sigma_0)$ et $(\Sigma)$, qui sont respectivement définies par les équations

$$X_0 = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad Y_0 = \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad Z_0 = \frac{\partial z}{\partial u}, \tag{15}$$

et

$$X = \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad Y = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad Z = \frac{\partial z}{\partial v}. \tag{16}$$

Toutes ces surfaces se correspondent par plans tangents parallèles; la surface $(\Sigma_0)$ est une sphère; quant à la surface $(\Sigma)$, elle a même représentation sphérique de ses lignes de courbure que les différentes surfaces $(\Sigma'')$; et, par conséquent, ses lignes de courbure correspondent au système conjugué qui est commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$.

On peut encore rattacher d'une autre manière la surface $(\Sigma)$ aux surfaces $(\Sigma'')$. Si l'on suppose que, dans les formules (14), $v_0$ grandisse indéfiniment, la droite isotrope correspondante $(d'')$ s'éloigne indéfiniment dans le plan

$$x_1 = u_0,$$

rattaché à la surface mobile. La surface $(\Sigma'')$ s'éloigne aussi indéfiniment; mais la surface homothétique décrite par le point dont les coordonnées sont

$$\frac{X''}{v_0}, \quad \frac{Y''}{v_0}, \quad \frac{Z''}{v_0}$$

demeure à distance finie et se réduit à la surface $(\Sigma)$ définie plus haut.

**1068.** Cette surface $(\Sigma)$ est précisément celle qui sert de base aux recherches de M. Weingarten. L'éminent géomètre l'introduit directement par les formules (16); et l'identité (12), déjà démontrée,

$$\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\, d\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

montre alors que les cosinus directeurs de la normale à la surface sont bien les quantités C, C′, C″ définies par les formules (13). Nous allons chercher directement les lignes de courbure et les rayons de courbure principaux de la surface $(\Sigma)$. Mais auparavant nous remarquerons que, lorsque $(\Sigma)$ sera connue, la surface $(\Theta)$ sera définie par les formules suivantes :

$$(17)\qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int \mathrm{C}\, du + \mathrm{X}\, dv, \\ y = \displaystyle\int \mathrm{C}'\, du + \mathrm{Y}\, dv, \\ z = \displaystyle\int \mathrm{C}''\, du + \mathrm{Z}\, dv; \end{cases}$$

et nous signalerons les identités

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathrm{CX} + \mathrm{C'Y} + \mathrm{C''Z} = p, \\ \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 = 2q, \end{cases}$$

d'où il résulte que *$p$ sera la distance de l'origine au plan tangent de* $(\Sigma)$ *et $2q$ le carré de la distance de la même origine au point de contact de ce plan tangent.*

**1069.** Cela posé, cherchons les lignes de courbure et les rayons de courbure principaux de la surface $(\Sigma)$.

Les équations d'Olinde Rodrigues

$$d\mathrm{X} + \rho\, d\mathrm{C} = 0, \qquad d\mathrm{Y} + \rho\, d\mathrm{C}' = 0, \qquad d\mathrm{Z} + \rho\, d\mathrm{C}'' = 0$$

nous donnent ici la suivante

$$(19)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\, du + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\, dv + \rho\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\, du + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\, dv\right) = 0$$

et les deux équations analogues en $y$ et $z$. Or, si l'on conserve les notations du Livre VII, Chapitre III, le système (36) [III, p. 251] devient ici

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{D}{H} c + \frac{r}{H^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial u}\right), \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} &= \frac{D'}{H} c + \frac{s}{H^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial u}\right), \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \frac{D''}{H} c + \frac{t}{H^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial u}\right), \end{aligned} \right.$$

D, D′, D″ étant les déterminants déjà définis et $r$, $s$, $t$ les dérivées secondes de $\varpi$, considérée comme fonction de $u$, $v$. Si, dans l'équation (19), on remplace les dérivées secondes de $x$ par leurs valeurs (20) et si l'on égale à zéro le coefficient de $c$ ainsi que celui de $\frac{\partial x}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial u}$, on trouvera les deux équations

$$\begin{aligned} D'\,du + D''\,dv + \rho(D\,du + D'\,dv) &= 0, \\ s\,du + t\,dv + \rho(r\,du + s\,dv) &= 0, \end{aligned}$$

qui détermineront à la fois $\rho$ et $\frac{dv}{du}$. L'équation différentielle

$$(21) \quad (D'\,du + D''\,dv)(r\,du + s\,dv) - (D\,du + D'\,dv)(s\,du + t\,dv) = 0,$$

qui résulte de l'élimination de $\rho$, définira les lignes de courbure et l'équation

$$(22) \quad \begin{vmatrix} 1 & -\rho & \rho^2 \\ r & s & t \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0$$

fera connaître les rayons de courbure principaux.

Le premier membre de l'équation (21) est évidemment la forme quadratique harmonique aux deux suivantes :

$$\begin{gathered} D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \\ r\,du^2 + 2s\,du\,dv + t\,dv^2, \end{gathered}$$

qui, égalées à zéro, déterminent respectivement les lignes asymptotiques des deux surfaces $(\Theta)$ et $(\Theta_1)$. On vérifie ainsi que les lignes de courbure de $(\Sigma)$ correspondent bien au système conjugué commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$. Quant à l'équation (22), elle peut

être remplacée par les deux suivantes :

(23) $$r\rho'\rho'' + s(\rho' + \rho'') + t = 0,$$

(24) $$D\rho'\rho'' + D'(\rho' + \rho'') + D'' = 0,$$

où $\rho'$ et $\rho''$ désignent les deux rayons de courbure principaux, et dont nous aurons à faire usage plus loin. On en déduit, en particulier, que l'on aura identiquement

(25) $$\rho'\rho''\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + (\rho' + \rho'')\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0,$$

comme on le voit en utilisant le système (20). Il nous reste maintenant à indiquer les conséquence.

1070. Nous remarquerons d'abord qu'on peut, en quelque sorte, supprimer la relation entre $(\Theta)$ et $(\Sigma)$, en définissant directement cette dernière surface.

En effet, dans l'équation (23) et dans les valeurs de $r$, $s$, $t$, exprimons $u$ et $v$ en fonction des variables $p$ et $q$ qui ont par rapport à $(\Sigma)$ une signification géométrique déterminée, indiquée à la fin du n° 1068. Nous aurons ainsi une relation entre les rayons de courbure de $(\Sigma)$, les distances de l'origine au plan tangent et au point de contact, c'est-à-dire *une équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle devra satisfaire* $(\Sigma)$. Voici un moyen élégant de faire le calcul. Posons

(26) $$\varphi = up + vq - w,$$

et exprimons $\varphi$ en fonction de $p$ et $q$. Comme on a, en différentiant,

$$d\varphi = u\,dp + v\,dq,$$

on pourra poser

(27) $$u = \frac{\partial\varphi}{\partial p}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial q}.$$

De plus, les équations

$$dp = r\,du + s\,dv, \qquad dq = s\,du + t\,dv,$$

qui définissent les dérivées secondes, nous donnent

$$du = d\frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{t\,dp - s\,dq}{rt - s^2}, \qquad dv = d\frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{r\,dq - s\,dp}{rt - s^2}$$

et, par suite,

$$(28)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q} = \frac{-s}{rt - s^2}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = \frac{r}{rt - s^2}.$$

C'est la transformation bien connue de Legendre, qui revient à remplacer la surface $(\Theta_1)$ par sa polaire réciproque relativement au paraboloïde défini par l'équation [1]

$$(29)\qquad 2w = u^2 + v^2.$$

Après cette transformation, l'équation (23) à laquelle satisfait $(\Sigma)$ prend la forme

$$(30)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} - (\rho' + \rho'')\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q} + \rho'\rho''\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0$$

et les formules définissant la surface $(\Theta)$ deviennent

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \int \mathrm{C}\, d\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \mathrm{X}\, d\frac{\partial \varphi}{\partial q}, \\ y &= \int \mathrm{C}'\, d\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \mathrm{Y}\, d\frac{\partial \varphi}{\partial q}, \\ z &= \int \mathrm{C}''\, d\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \mathrm{Z}\, d\frac{\partial \varphi}{\partial q}. \end{aligned}\right.$$

Quant à l'élément linéaire de $(\Theta)$, il s'exprimera comme il suit :

$$(32)\qquad ds^2 = \left(d\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2 + 2p\, d\frac{\partial \varphi}{\partial p}\, d\frac{\partial \varphi}{\partial q} + 2q\left(d\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2.$$

**1071.** Nous allons maintenant démontrer la réciproque : si la surface $(\Sigma)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles (30), les formules (31) déterminent une surface $(\Theta)$ admettant l'élément linéaire donné.

Comme la formule (32), équivalente à celle (4) qui a servi de point de départ, résulte immédiatement des équations (31) en

---

(1) En effet, d'après les formules (2) qui relient $u$, $v$, $w$ aux coordonnées rectangulaires $x_1$, $y_1$, $z_1$, on voit que ces variables $u$, $v$, $w$ constituent, elles aussi, un système de coordonnées rectilignes, de sorte que la transformation indiquée dans le texte équivaut à prendre la polaire réciproque de la surface $(\Theta_1)$, admettant l'élément linéaire donné, relativement au paraboloïde défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y - iz = x^2 + (y + iz)^2,$$

admettant qu'elles soient établies, tout se réduit à démontrer que les expressions telles que la suivante

$$(33)\qquad C\, d\frac{\partial\varphi}{\partial p} + X\, d\frac{\partial\varphi}{\partial q}$$

sont des différentielles exactes.

Or, aux équations d'Olinde Rodrigues, qui définissent les lignes de courbure

$$dX + \rho\, dC = 0, \qquad dY + \rho\, dC' = 0, \qquad dZ + \rho\, dC'' = 0,$$

on peut adjoindre la suivante

$$(34)\qquad dq + \rho\, dp = 0,$$

que l'on obtient en les ajoutant après les avoir multipliées respectivement par X, Y, Z. Si donc on a pris $p$ et $q$ pour variables indépendantes, on aura, pour chaque ligne de courbure,

$$\frac{\partial X}{\partial p}\, dp + \frac{\partial X}{\partial q}\, dq + \rho\left(\frac{\partial C}{\partial p}\, dp + \frac{\partial C}{\partial q}\, dq\right) = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{dp}{dq}$ par sa valeur déduite de l'équation (34),

$$(35)\qquad \frac{\partial X}{\partial p} + \rho\left(\frac{\partial C}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial q}\right) - \rho^2 \frac{\partial C}{\partial q} = 0;$$

de sorte que l'on peut poser

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} (\rho' + \rho'')\frac{\partial C}{\partial q} &= \frac{\partial C}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial q},\\ \rho'\rho''\frac{\partial C}{\partial q} &= -\frac{\partial X}{\partial p};\end{aligned}\right.$$

et de là l'on déduit

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial p} &= -\rho'\rho''\frac{\partial C}{\partial q},\\ \frac{\partial X}{\partial q} &= \frac{\partial C}{\partial p} - (\rho' + \rho'')\frac{\partial C}{\partial q}.\end{aligned}\right.$$

Ces relations, auxquelles il faut joindre les formules analogues en Y et C', Z et C'', constituent une des propriétés du système de coordonnées curvilignes $p$, $q$.

Cela posé, écrivons la condition d'intégrabilité de la différen-

tielle (33); il viendra

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(C\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+X\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(C\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}+X\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}\right)$$

ou, en réduisant,

$$\frac{\partial C}{\partial q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+\left(\frac{\partial X}{\partial q}-\frac{\partial C}{\partial p}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}-\frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}=0.$$

Il suffit de tenir compte des relations (36) pour voir apparaître le premier membre de l'équation (30) multiplié par $\frac{\partial C}{\partial q}$. Notre réciproque est donc complètement démontrée.

1072. Nous avons ainsi réalisé une transformation radicale de l'équation aux dérivées partielles qu'il s'agissait d'intégrer, et notre remarque du début nous montre que, pourvu que l'on connaisse une surface particulière admettant un élément linéaire donné, la détermination complète des surfaces admettant ce même élément linéaire pourra toujours se ramener à l'intégration d'une équation de la forme (30). Comme on a ici, d'après la formule (21) [III, p. 246]

$$(38)\qquad DD''-D'^2=s^2-rt,$$

l'équation à laquelle satisferait la coordonnée $x$ relative à la surface $(\Theta)$ serait, en remplaçant D, D', D'' par leurs valeurs tirées du système (20) et faisant quelques réductions,

$$(39)\qquad \begin{cases} (2q-p^2)\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right] \\ \qquad -\left(\frac{\partial x}{\partial v}-p\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(t\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-2s\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+r\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right) \\ \quad =(s^2-rt)\left[1-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Il reviendra au même d'intégrer cette équation, ou celle (30) que nous avons formée plus haut et qui détermine $(\Sigma)$.

Nous savons (n° 703) que l'équation précédente admet pour caractéristiques les lignes asymptotiques de la surface $(\Theta)$ définies par l'équation différentielle

$$(40)\qquad D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2=0.$$

Ces caractéristiques sont aussi celles qui conviennent à l'équation (30). On pourrait, comme l'a fait M. Goursat dans le Mémoire cité plus haut, établir ce résultat par un raisonnement *a priori*. Nous nous contenterons de remarquer que les caractéristiques de l'équation générale aux dérivées partielles

$$H\rho'\rho'' + K(\rho' + \rho'') + L = 0, \tag{41}$$

où, $\rho'$, $\rho''$ désignant toujours les rayons de courbure principaux, les fonctions H, K, L ne contiennent que les coordonnées X, Y, Z du point et les cosinus directeurs C, C', C'' de la normale à la surface, sont déterminées par l'équation différentielle

$$H \mathbf{S}\, dC\, dX - K \mathbf{S}\, dC^2 = 0. \tag{42}$$

Cette équation, à laquelle conduit l'application régulière des méthodes générales, deviendra ici

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} \mathbf{S}\, dC\, dX + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q} \mathbf{S}\, dC^2 = 0,$$

ou, en tenant compte des formules (28),

$$r \mathbf{S}\, dC\, dX - s \mathbf{S}\, dC^2 = 0. \tag{43}$$

Or calculons les trois formes quadratiques

$$\mathbf{S}\, dC\, dX, \qquad \mathbf{S}\, dX^2, \qquad \mathbf{S}\, dC^2,$$

relatives à la surface $(\Sigma)$, et qui définissent, pour cette surface, les lignes asymptotiques, les lignes de longueur nulle et les lignes de longueur nulle de la représentation sphérique; c'est-à-dire trois systèmes de courbes divisant harmoniquement les lignes de courbure de $(\Sigma)$. Un calcul facile, où l'on aura à employer les formules (20) et à tenir compte de l'identité (38), nous donnera

$$(44)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{S}\, dC^2 &= \frac{D}{H^2}(D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2) + \frac{r}{H^2}(r\, du^2 + 2s\, du\, dv + t\, dv^2), \\ \mathbf{S}\, dC\, dX &= \frac{D'}{H^2}(D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2) + \frac{s}{H^2}(r\, du^2 + 2s\, du\, dv + t\, dv^2), \\ \mathbf{S}\, dX^2 &= \frac{D''}{H^2}(D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2) + \frac{t}{H^2}(r\, du^2 + 2s\, du\, dv + t\, dv^2). \end{aligned} \right.$$

Ces relations permettent, en premier lieu, d'établir le fait annoncé et de mettre en évidence l'identité des deux systèmes de caractéristiques définis par les équations (40) et (43). Elles montrent aussi que les trois familles de lignes précédentes sont en involution avec les lignes asymptotiques des surfaces $(\Theta)$ et $(\Theta_1)$. Il fallait s'y attendre, puisqu'elles divisent toutes harmoniquement le réseau formé par les lignes de courbure de $(\Sigma)$, qui correspond au réseau conjugué commun à $(\Theta)$ et à $(\Theta_1)$.

**1073.** On peut faire des applications diverses des résultats précédents. Nous présenterons d'abord la remarque générale suivante.

Supposons qu'on veuille déterminer toutes les surfaces admettant un élément linéaire donné. La connaissance d'une solution particulière $(\Theta_1)$ nous permettra de ramener le problème à l'intégration d'une équation de la forme (30). Cette intégration étant effectuée, on connaîtra un nombre illimité de surfaces $(\Theta'_1)$ admettant l'élément linéaire donné; et à chacune d'elles correspondra une forme déterminée de l'équation (30). Donc, lorsqu'on sait intégrer une équation de cette forme, il en existe un nombre illimité d'autres de même forme, mais où la fonction $\varphi$ aura une détermination différente, que l'on saura intégrer. Rappelons même pour plus de netteté la signification géométrique de la fonction $\varphi$. Nous avons vu que l'équation

$$\varpi = \varphi(p, q)$$

représente, si l'on y regarde les variables $p$, $q$, $\varpi$ comme des coordonnées cartésiennes, reliées aux coordonnées rectangulaires par les formules (2), la polaire réciproque de l'une des surfaces admettant l'élément linéaire donné, prise relativement au paraboloïde représenté par l'équation (29) donnée plus haut.

Pour examiner maintenant quelques applications particulières, envisageons d'abord l'élément linéaire de la sphère

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2.$$

En prenant ici

$$x_1 = u = \cos\theta,$$
$$v = y_1 + iz_1 = \sin\theta\, e^{i\psi},$$
$$2\varpi = y_1 - iz_1 = \sin\theta\, e^{-i\psi},$$

l'équation

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$$

nous donnera la relation

$$2vw = 1 - u^2,$$

d'où l'on pourra déduire

$$p = -\frac{u}{v}, \qquad q = \frac{u^2 - 1}{2v^2}, \qquad \varphi = -\frac{1}{v}, \qquad \varphi = \sqrt{p^2 - 2q}.$$

L'équation (30) devient ici

$$(\rho' + p)(\rho'' + p) = p^2 - 2q.$$

Elle exprime que la sphère ayant pour diamètre la droite qui joint les deux centres de courbure principaux de $(\Sigma)$ doit passer à l'origine des coordonnées. Il n'y a là qu'un fait curieux, l'équation précédente étant plus compliquée que celle des surfaces à courbure constante.

**1074.** Pour obtenir d'autres applications, nous remarquerons une conséquence intéressante des équations (44) relatives aux trois familles de lignes tracées sur $(\Sigma)$. *Il faudra une seule condition pour que les lignes qui composent l'une de ces trois familles deviennent les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles* (30) *à laquelle doit satisfaire la surface* $(\Sigma)$.

Si l'on veut, par exemple, que ces caractéristiques soient les lignes de longueur nulle de la représentation sphérique, il faudra supposer

$$r = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0.$$

La fonction la plus générale satisfaisant à cette condition serait

$$\varphi = q f(p) + f_1(p);$$

on verra aisément qu'on ne restreint pas la généralité en supposant $f(p) = p$, ce qui permet d'écrire $\varphi$ sous la forme

$$\varphi = pq - \frac{p^3}{3} - \psi(p); \tag{45}$$

et l'équation à intégrer deviendra

(46) $$\rho' + \rho'' = -2p - \psi''(p).$$

On aura ici

(47) $$u = \frac{\partial\varphi}{\partial p} = q - p^2 - \psi'(p), \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial q} = p;$$

de sorte que l'élément linéaire de $(\Theta)$ pourra s'écrire

(48) $$ds^2 = du^2 + 2v\,du\,dv + [2u + 2v^2 + 2\psi'(v)]\,dv^2.$$

Posons

(49) $$u + \frac{v^2}{2} = u_1,$$

il viendra

(50) $$ds^2 = du_1^2 + 2[u_1 + \psi'(v)]\,dv^2.$$

La détermination de toutes les surfaces qui admettent cet élément linéaire sera ainsi ramenée à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (46).

Or cette équation prend une forme très simple si l'on emploie le système de coordonnées tangentielles défini au nº 165, c'est-à-dire si l'on regarde la surface $(\Sigma)$ comme l'enveloppe du plan dont l'équation est

(51) $$(\alpha + \beta)X + i(\beta - \alpha)Y + (\alpha\beta - 1)Z + \xi = 0.$$

On aura ici

(52) $$C = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \qquad C' = \frac{i(\beta - \alpha)}{1 + \alpha\beta}, \qquad C'' = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1},$$

(53) $$\xi = -p(1 + \alpha\beta)$$

et un calcul facile donnera les formules très symétriques

(54) $$\begin{cases} X = Cp + \dfrac{(1 + \alpha\beta)^2}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}\dfrac{\partial C}{\partial \beta} + \dfrac{\partial p}{\partial \beta}\dfrac{\partial C}{\partial \alpha}\right), \\ Y = C'p + \dfrac{(1 + \alpha\beta)^2}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}\dfrac{\partial C'}{\partial \beta} + \dfrac{\partial p}{\partial \beta}\dfrac{\partial C'}{\partial \alpha}\right), \\ Z = C''p + \dfrac{(1 + \alpha\beta)^2}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial \alpha}\dfrac{\partial C''}{\partial \beta} + \dfrac{\partial p}{\partial \beta}\dfrac{\partial C''}{\partial \alpha}\right). \end{cases}$$

On déduira de là

$$(55) \qquad q = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2} = \frac{p^2}{2} + \frac{(1+\alpha\beta)^2}{2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta}.$$

Les rayons de courbure sont exprimés par la première des équations (33) [I, p. 246], qui donne ici

$$(56) \qquad \rho' + \rho'' = -2p - \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \, \partial \beta} (1+\alpha\beta)^2;$$

et, par suite, l'équation (46) prendra la forme extrêmement simple

$$(57) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \frac{\psi''(p)}{(1+\alpha\beta)^2}.$$

Lorsque l'on aura intégré cette équation, on aura $x$, $y$, $z$ par les formules (31); ce qui donnera, après quelques réductions,

$$(58) \quad \begin{cases} x = \mathrm{C} u_1 + \displaystyle\int \psi'(p)\, d\mathrm{C} + \frac{(1+\alpha\beta)^2}{2} \left[ \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \beta} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)^2 d\alpha + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial \beta}\right)^2 d\beta \right], \\ y = \mathrm{C}' u_1 + \displaystyle\int \psi'(p)\, d\mathrm{C}' + \frac{(1+\alpha\beta)^2}{2} \left[ \frac{\partial \mathrm{C}'}{\partial \beta} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)^2 d\alpha + \frac{\partial \mathrm{C}'}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial \beta}\right)^2 d\beta \right], \\ z = \mathrm{C}'' u_1 + \displaystyle\int \psi'(p)\, d\mathrm{C}'' + \frac{(1+\alpha\beta)^2}{2} \left[ \frac{\partial \mathrm{C}''}{\partial \beta} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)^2 d\alpha + \frac{\partial \mathrm{C}''}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial \beta}\right)^2 d\beta \right], \end{cases}$$

$u_1$ ayant la valeur définie par la formule (49), qui devient ici

$$(59) \qquad u_1 = \frac{(1+\alpha\beta)^2}{2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta} - \psi'(p).$$

Or il suffit de se reporter aux propriétés des lignes géodésiques et à la forme (50) de l'élément linéaire pour interpréter géométriquement les formules qui définissent $(\Sigma)$.

Considérons la surface auxiliaire $(\Sigma_1)$ définie par les équations

$$(60) \qquad x_1 = x - \mathrm{C} u_1, \qquad y_1 = y - \mathrm{C}' u_1, \qquad z_1 = z - \mathrm{C}'' u_1.$$

Il résulte immédiatement des équations (58) que l'on a

$$\mathrm{C}\, dx_1 + \mathrm{C}'\, dy_1 + \mathrm{C}''\, dz_1 = 0.$$

Par conséquent la surface $(\Sigma_1)$ est une développante de $(\Theta)$ suivant le système de lignes géodésiques de paramètre $\rho$ : ce sont les courbes de paramètre $\rho$ sur $(\Sigma_1)$ qui auront pour développées les lignes géodésiques de $(\Theta)$.

La surface $(\Sigma_1)$ est déterminée ponctuellement par les formules (60). On peut la déterminer tangentiellement en la considérant comme enveloppe du plan défini par l'équation

$$Cx_1 + C'y_1 + C''z_1 + \frac{\omega}{1+\alpha\beta} = 0,$$

ou encore

$$(\alpha+\beta)x_1 + i(\beta-\alpha)y_1 + (\alpha\beta-1)z_1 + \omega = 0, \tag{61}$$

ce qui donne les relations

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + x_1 - iy_1 + \beta z_1 = 0,\\
&\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial x_1}{\partial\alpha} - i\frac{\partial y_1}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial z_1}{\partial\alpha} = 0,\\
&\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial x_1}{\partial\beta} - i\frac{\partial y_1}{\partial\beta} + \beta\frac{\partial z_1}{\partial\beta} + z_1 = 0,
\end{aligned}$$

et deux autres relations semblables faisant connaître $\frac{\partial\omega}{\partial\beta}$, $\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2}$.

On déduit de là

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} = -(1+\alpha\beta)\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = -(1+\alpha\beta)\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}\right)^2,\\
&\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\frac{2\psi'(p)}{1+\alpha\beta}\\
&\qquad -\int\left[\alpha\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right)^2 d\alpha + \beta\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}\right)^2 \partial\beta + 2\psi'(p)\frac{\beta\,d\alpha + \alpha\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}\right];
\end{aligned}\right. \tag{62}$$

et ces trois équations, toujours compatibles, détermineront $\omega$. Les termes de la forme

$$A + B\alpha + C\beta + D\alpha\beta$$

introduits par les intégrations conviennent à des surfaces qui se déduisent les unes des autres par une translation ou par le passage à la surface parallèle.

On voit que les lignes de courbure sont déterminées (n° 165 par les équations différentielles

$$\frac{\partial p}{\partial\alpha}d\alpha \pm \frac{\partial p}{\partial\beta}\partial\beta = 0.$$

Donc, comme il fallait s'y attendre, une des familles est formée

des courbes

$$p = \text{const.},$$

auxquelles correspondent sur $(\Theta)$ les lignes géodésiques de paramètre $v$.

**1075.** En résumé, les formules auxquelles nous avons été conduits font dépendre la détermination de toutes les surfaces $(\Theta)$ dont l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = du_1^2 + 2[u_1 + \psi'(v)]\,dv^2 \tag{63}$$

de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\psi''(v)}{(1+\alpha\beta)^2}, \tag{64}$$

ou de la détermination des surfaces $(\Sigma)$ dont les rayons de courbure satisfont à la relation

$$\rho' + \rho'' = -2p - \psi''(p), \tag{65}$$

dans laquelle $p$ désigne la distance de l'origine au plan tangent.

Malheureusement, quelque simple qu'en soit la forme, l'équation aux dérivées partielles (64) n'est pas intégrable en général. M. Weingarten, et ensuite M. Goursat, ont cependant indiqué quelques cas dans lesquels on peut obtenir son intégrale générale.

Supposons, par exemple, que la fonction $\psi''$ soit linéaire, et posons

$$\psi'(v) = \frac{m(1-m)v^2}{2}, \tag{66}$$

$m$ désignant une constante quelconque. L'équation (64) deviendra

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{m(1-m)v}{(1+\alpha\beta)^2}, \tag{67}$$

et, si l'on effectue la substitution

$$\beta = -\frac{1}{\beta_0},$$

elle se réduira à l'équation d'Euler

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta_0} = \frac{m(1-m)v}{(\alpha-\beta_0)^2}, \tag{68}$$

que nous savons intégrer, soit par des formules finies lorsque $m$ est entier, soit par des intégrales définies dans tous les autres cas (Livre IV, Chap. III et IV).

Alors la relation (65), qui sert de définition à la surface ($\Sigma$), sera

$$\rho' + \rho'' + 2p = m(m-1)p. \tag{69}$$

Si l'on mène le plan perpendiculaire à la normale d'une surface à égale distance des deux centres de courbure, il enveloppe une autre surface à laquelle nous donnerons ici le nom de *développée moyenne* de la première ([1]). Comme la distance de l'origine à ce plan est

$$\frac{\rho' + \rho''}{2} + p,$$

on voit que l'équation (69) exprime que la développée moyenne de la surface ($\Sigma$) *est une surface homothétique à* ($\Sigma$) ([2]).

---

([1]) Au n° 912 nous avons déjà donné le nom de *développée moyenne* à la surface décrite par le milieu du segment formé par les centres de courbure principaux. Nous mettrons à profit cette occasion pour rappeler ici que Ribaucour a introduit avec succès deux surfaces différentes dans la théorie des congruences rectilignes : l'une, la *surface moyenne,* décrite par le milieu du segment focal; l'autre, l'*enveloppée moyenne,* enveloppe du plan perpendiculaire sur le milieu du segment focal. Quand la congruence rectiligne est engendrée par les normales d'une surface ($\Sigma$), on a ainsi deux surfaces distinctes rattachées à ($\Sigma$). On pourrait, si on les rencontrait dans une même étude, les désigner respectivement sous les noms de *développée moyenne ponctuelle* et de *développée moyenne tangentielle.*

([2]) Les surfaces jouissant de cette propriété avaient été déjà considérées par Ribaucour et par M. Appell dans le cas particulier où $m = 0$ et où, par suite, la développée moyenne se réduit à un point. Elles avaient été étudiées pour toutes les valeurs de $m$ par M. Goursat. Le lecteur pourra consulter les Mémoires suivants :

A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes,* Chapitre VI (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. VII, 4e série; 1891, présenté en 1876 à l'Académie des Sciences).

P. Appell, *Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux* (*American Journal of Mathematics,* t. X p. 175; 1888).

E. Goursat, *Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe au plan tangent.* (Même Recueil et même tome, p. 187).

Mais, il est juste de le reconnaître, c'est à un jeune géomètre italien, M. Ettore Baroni, que revient le mérite d'avoir, le premier, signalé qu'à chaque surface homothétique à sa développée moyenne on peut faire correspondre une surface

Examinons les cas particuliers les plus intéressants. Pour $m = 0$ ou $m = 1$, les surfaces $(\Theta)$ sont les développées des surfaces minima; cela résulte de la forme même de leur élément linéaire (n° 751). La surface $(\Sigma)$ est celle dont la développée moyenne se réduit à un point. L'équation (68) s'intègre alors sans difficulté et nous donne

$$v = f(\alpha) + f_0(\beta).$$

Pour $m = 2$, on a

$$\psi'(v) = -v^2. \tag{70}$$

Ce cas intéressant avait été étudié depuis longtemps par M. Weingarten dans un Mémoire cité plus loin [p. 335] et inséré aux *Nachrichten* de Gœttingue. Les surfaces $(\Sigma)$ se réduisent aux surfaces minima; elles sont, par suite, *identiques* à leur développée moyenne.

1076. Considérons, d'une manière plus générale, la fonction $\psi'$ définie par la formule

$$\psi'(v) = m(1-m)\frac{v^2}{2} + \mathrm{A}v, \tag{71}$$

où A désigne une constante quelconque. L'équation (64) à intégrer prendra la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{m(1-m)v + \mathrm{A}}{(1+\alpha\beta)^2}. \tag{72}$$

Et il est clair que si $m(1-m)$ n'est pas nul, on peut, par la substitution très simple,

$$v + \frac{\mathrm{A}}{m(1-m)} = v_1,$$

la ramener à l'équation (67). D'ailleurs l'hypothèse $m(1-m) = 0$,

---

admettant un élément linéaire donné; de sorte que l'intégration complète de l'équation (69) pour une valeur donnée de $m$ fait connaître par cela même *toutes* les surfaces qui admettent un même élément linéaire. *Voir* le Mémoire intitulé : *Superficie Σ in cui la somma dei raggi principali di curvatura è proporzionale alla distanza di un punto fisso dal piano tangente;* inséré par M. Baroni, en 1890, au tome XXVIII du *Giornale di Matematiche*, p. 349.

nous donne

$$v = \mathrm{A}\,\mathrm{Log}(1+\alpha\beta) + f(\alpha) + f_0(\beta).$$

L'élément linéaire de $(\Theta)$

$$ds^2 = du_1^2 + (2u_1 + 2\mathrm{A}v)\,dv^2$$

convient (n° 693) aux surfaces que nous avons reconnues être applicables sur le paraboloïde de révolution. Les surfaces $(\Sigma)$ correspondantes admettent comme développée moyenne une sphère. Pour le cas général de la formule (71), *la développée moyenne serait homothétique à une surface parallèle à* $(\Sigma)$.

Comme on peut toujours remplacer $(\Sigma)$ par une surface parallèle, notre nouvelle hypothèse ne donne donc rien d'essentiellement nouveau. Au reste, par un changement de notations, on peut toujours faire disparaître la constante A dans l'expression de l'élément linéaire, toutes les fois que le produit $m(1-m)$ est différent de zéro.

1077. Pour trouver, s'il en existe, d'autres cas dans lesquels l'équation aux dérivées partielles puisse être intégrée, appliquons les méthodes régulières et commençons par chercher si elle peut admettre, par exemple, une intégrale première. Soit

$$\mathrm{F}\left(v, \alpha, \beta, \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) = 0, \tag{73}$$

cette intégrale première. Si on la différentie par rapport à $\alpha$, par exemple, on aura

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} p' + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p'} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q'} \frac{\psi''(v)}{(1+\alpha\beta)^2} = 0 \tag{74}$$

$p'$ et $q'$ désignant les dérivées premières de $v$. En différentiant par rapport à $\beta$, on aura de même

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} q' + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p'} \frac{\psi''(v)}{(1+\alpha\beta)^2} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q'} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = 0. \tag{75}$$

Si l'une ou l'autre des deux équations précédentes n'est pas vérifiée identiquement, on pourra déterminer les trois dérivées secondes ou les deux dérivées premières de $v$; et, par suite, les seules solutions qui pourront être communes à l'équation (73) et à

la proposée contiendront tout au plus des constantes arbitraires. Supposons donc que l'une des équations (74), (75), la seconde par exemple, soit vérifiée identiquement. Il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial q'} = 0.$$

L'équation (73) pourra donc s'écrire

$$p' = \Phi(v, \alpha, \beta),$$

et l'équation (75) deviendra

$$q' \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \frac{\psi''(v)}{(1+\alpha\beta)^2} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = \frac{\psi''(v)}{(1+\alpha\beta)^2};$$

$\psi''(v)$ devra donc se réduire à une constante, et l'on retrouve une des hypothèses déjà examinées.

1078. Voilà tout ce que donnerait la méthode de Monge. Essayons celle que j'ai proposée et qui consiste à chercher des équations aux dérivées partielles de tous ordres ayant en commun avec la proposée la solution la plus étendue possible. Nous nous bornerons à examiner le cas où ces équations sont du second ordre. On reconnaîtra aisément qu'elles doivent être de la forme suivante

$$(76) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = F\left(\alpha, \beta, \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right),$$

ou de celle qu'on obtient en changeant $\alpha$ en $\beta$. Pour déterminer F, il faut différentier par rapport à $\beta$, ce qui donnera

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\psi''(v)}{(1+\alpha\beta)^2} = \frac{\partial F}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial p'} \frac{\psi''(v)}{(1+\alpha\beta)^2},$$

et exprimer que cette équation a lieu identiquement. Le développement du calcul nous donne

$$(77) \qquad \frac{\psi'''(v)}{(1+\alpha\beta)^2} p' - \frac{2\psi''(v)\beta}{(1+\alpha\beta)^3} = \frac{\partial F}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial p'} \frac{\psi''(v)}{(1+\alpha\beta)^2}.$$

Comme F ne contient pas $v$, on peut donner à $\alpha$, $\beta$, $p'$ des valeurs constantes et l'on aura une relation linéaire entre $\psi'''$ et $\psi''$. Écartant le cas déjà examiné où $\psi''$ serait constante, nous écrirons

$$\psi''' = \frac{2}{a}\psi'' + h; \tag{78}$$

et il restera à égaler les coefficients de $\psi''$, ainsi que les termes qui ne contiennent pas cette fonction, dans les deux membres de l'équation (77). On aura ainsi

$$\frac{\partial F}{\partial p'} = \frac{2}{a}p' - \frac{2\beta}{1+\alpha\beta}, \qquad \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{hp'}{(1+\alpha\beta)^2}.$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut que l'on ait $h = -2$. Il vient alors

$$F = \frac{p'^2}{a} - \frac{2\beta p'}{1+\alpha\beta} + f(\alpha).$$

L'équation (76) prend donc la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 - 2\frac{\beta}{1+\alpha\beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + f(\alpha). \tag{79}$$

On pourra de même poser

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2 - 2\frac{\alpha}{1+\alpha\beta}\frac{\partial v}{\partial \beta} + f_1(\beta). \tag{80}$$

Quant à l'équation aux dérivées partielles, comme on déduit de l'équation (78), où l'on a remplacé $h$ par $-2$, la valeur suivante de $\psi''$

$$\psi''(v) = a - \frac{a}{b}e^{\frac{2v}{a}},$$

elle deviendra

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\,\partial \beta} = \frac{a - \frac{a}{b}e^{\frac{2v}{a}}}{(1+\alpha\beta)^2}; \tag{81}$$

et il ne restera plus qu'à trouver la solution commune aux trois équations (79), (80) et (81).

Ce calcul n'offrirait aucune difficulté. Mais il vaut mieux, une fois l'équation obtenue, opérer comme il suit.

Effectuons la substitution

(82) $$v = a\,\mathrm{Log}(1+\alpha\beta) + w.$$

L'équation (81) prend la forme

(83) $$\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\frac{a}{b}e^{\frac{2w}{a}},$$

dont Liouville a donné l'intégrale (n° 726) (1). On a

(84) $$e^{\frac{2w}{a}} = \frac{b\,A'B'}{(1+AB)^2},$$

A désignant une fonction arbitraire de $\alpha$ et B une fonction arbitraire de $\beta$. On trouvera donc pour $v$ la valeur définie par l'équation suivante :

(85) $$e^{\frac{2v}{a}} = b\frac{A'B'(1+\alpha\beta)^2}{(1+AB)^2}.$$

Quant à l'élément linéaire de $(\Theta)$, il sera donné par la formule

(86) $$ds^2 = du_1^2 + \left(2u_1 + 2av - \frac{a^2}{b}e^{\frac{2v}{a}}\right)dv^2.$$

Par une substitution de la forme

(87) $$\begin{cases} u_1 = a^2 u' + h, \\ v = av' + k, \end{cases}$$

on peut obtenir l'expression plus simple

(88) $$ds^2 = a^4[du'^2 + (2u' + 2v' + e^{2v'})\,dv'^2].$$

Ce cas nouveau a été signalé par M. Weingarten. L'éminent géomètre a indiqué qu'on peut alors ramener l'élément linéaire à la forme suivante :

(89) $$ds^2 = (\alpha-\beta)\left(\frac{\alpha-2}{\alpha^2}\,d\alpha^2 - \frac{\beta-2}{\beta^2}\,d\beta^2\right).$$

Cela nous conduit à présenter les remarques suivantes, par lesquelles nous terminerons ce Chapitre.

---

(1) Les démonstrations de Liouville se trouvent, soit dans la Note IV de la cinquième édition de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie par* MONGE, soit au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1re série, t. XVIII, p. 71; 1853).

**1079.** La forme générale

$$(90) \qquad ds^2 = du_1^2 + [2u_1 + 2\psi'(v)]\,dv^2$$

est évidemment un cas limite de celle qui convient aux surfaces réglées. Et, en effet, il est possible de trouver toute une classe de surfaces réglées imaginaires admettant cet élément linéaire.

Si l'on se reporte aux calculs du n° 728, on trouvera que toutes ces surfaces réglées sont engendrées par la droite

$$x = a_1 u_1 + b_1, \qquad y = a_2 u_1 + b_2, \qquad z = a_3 u_1 + b_3,$$

les fonctions $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$ étant définies par les relations (2) [III, p. 294], qui deviennent ici

$$\begin{aligned} &a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = 0, & a_1 b_1' + a_2 b_2' + a_3 b_3' = 0,\\ &a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3' = 1, & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,\\ &b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 = 2\psi'(v). & \end{aligned}$$

La première de ces relations montre que les surfaces réglées cherchées admettent un plan directeur isotrope. Comme on peut supposer que ce plan soit parallèle au suivant

$$y + iz = 0,$$

on trouvera aisément que, si $\alpha$ désigne une fonction de $v$ et $\alpha'$ sa dérivée, on peut écrire les équations qui déterminent la surface sous la forme

$$(91) \qquad \left\{ \begin{aligned} y + iz &= 2\int \frac{dv}{\alpha'},\\ y - iz &= \alpha u_1 + \int \alpha' \psi'(v)\,dv - \int \frac{\alpha^2}{2\alpha'}\,dv,\\ x &= u_1 - \int \frac{\alpha}{\alpha'}\,dv. \end{aligned} \right.$$

Inversement, toutes les surfaces réglées qui admettent un plan directeur isotrope ont leur élément linéaire réductible à la forme (90).

D'après cela, cherchons toutes les surfaces du second degré qui rentrent dans la classe précédente. Une seule est réelle, c'est le paraboloïde de révolution. Nous l'avons déjà examiné, et nous

avons même donné (n° 727) la forme de $\psi'(v)$ qui correspond à son élément linéaire. Mais il y a d'autres paraboloïdes qui remplissent les conditions que nous venons d'indiquer : ce sont ceux qui admettent une génératrice rectiligne tangente au cercle de l'infini.

Considérons d'abord celui qui touche le plan de l'infini, en un point non situé sur le cercle de l'infini. Son équation pourra toujours se ramener à la forme

$$(92)\qquad (y+iz)y = -kx.$$

En substituant les valeurs (91) de $x$, $y$, $z$ dans les formules précédentes, on verra aisément que l'on peut prendre

$$\alpha = \sqrt{k}\alpha', \qquad \alpha = e^{\frac{v}{\sqrt{k}}}, \qquad \int \frac{\alpha}{\alpha'}\,dv = v\sqrt{k} - \frac{k}{2},$$

et l'on trouvera

$$(93)\qquad \psi'(v) = -v\sqrt{k} - 2ke^{-\frac{2v}{\sqrt{k}}},$$

C'est, aux notations près, l'expression de $\psi'(v)$ qui correspond au cas nouveau signalé par M. Weingarten.

On peut donc énoncer le résultat que nous lui devons en disant qu'il nous a appris à connaître toutes les surfaces applicables sur ce paraboloïde particulier dont une génératrice rectiligne est tangente au cercle de l'infini, le point de contact de cette génératrice et du cercle étant distinct du point de contact du paraboloïde et du plan de l'infini.

Considérons maintenant le paraboloïde dont une génératrice est tangente au cercle de l'infini, le point de contact de cette génératrice étant aussi celui où le paraboloïde touche le plan de l'infini. L'équation de la surface pourra être ramenée à la forme

$$(94)\qquad x(y+iz) = k(y-iz).$$

Appliquant la même méthode que précédemment, on trouvera

$$(95)\qquad \psi'(v) = -v^2.$$

C'est le cas qui a servi de point de départ à toutes les nou-

velles recherches de M. Weingarten et qui a été signalé plus haut (n° 1075). M. Weingarten l'avait obtenu dès 1887 [1] et il semble bien que la méthode que nous avons exposée dans ce Chapitre, et qu'il a ensuite appliquée aux cas les plus généraux, a son point de départ et son origine dans celle qu'il avait d'abord employée pour cette forme plus particulière de l'élément linéaire.

**1080.** Dans les deux hypothèses que nous venons d'examiner, M. Weingarten, sans chercher si les éléments linéaires pouvaient convenir à des surfaces du second degré, a reconnu qu'ils sont, l'un et l'autre, réductibles à la forme de Liouville, ce qui permet l'intégration des lignes géodésiques. Ce point paraîtra maintenant évident au lecteur puisqu'il suffit, pour obtenir cette forme de l'élément linéaire, de rapporter une surface du second degré à ses lignes de courbure. Mais il ne sera pas inutile d'effectuer cette transformation de l'élément linéaire et de retrouver effectivement les expressions données par M. Weingarten. Nous nous contenterons seulement d'indiquer la marche du calcul, que rétablira aisément tout lecteur un peu versé dans la connaissance de la Géométrie analytique.

Soit

$$(96)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x,y,z) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy \\ + 2\mathrm{C}x + 2\mathrm{C}'y + 2\mathrm{C}''z + \mathrm{D} = 0 \end{aligned} \right.$$

l'équation d'une surface du second degré. Désignons par H le hessien

$$(97)\qquad \mathrm{H} = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' & \mathrm{C} \\ \mathrm{B}'' & \mathrm{A}' & \mathrm{B} & \mathrm{C}' \\ \mathrm{B}' & \mathrm{B} & \mathrm{A}'' & \mathrm{C}'' \\ \mathrm{C} & \mathrm{C}' & \mathrm{C}'' & \mathrm{D} \end{vmatrix}$$

de cette équation. Les lignes de courbure seront à l'intersection de la surface et des suivantes, où $\lambda$ désigne un paramètre arbi-

---

(1) J. WEINGARTEN, *Eine neue Classe auf einander abwickelbarer Flächen* (*Nachrichten* de Gœttingue, janvier 1887, p. 28).

traire

$$(98)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda^2 - \lambda\left[\frac{\partial H}{\partial D}(x^2+y^2+z^2) - \frac{\partial H}{\partial C}x - \frac{\partial H}{\partial C'}y - \frac{\partial H}{\partial C''}z + \frac{\partial H}{\partial A} + \frac{\partial H}{\partial A'} + \frac{\partial H}{\partial A''}\right] \\ &\qquad\qquad - \frac{H}{4}(f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2) = \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$(99)\qquad \lambda' = Hu, \qquad \lambda'' = Hv,$$

$\lambda'$ et $\lambda''$ étant les deux racines de l'équation en $\lambda$ (98), on aura, pour l'élément linéaire de la surface, l'expression

$$(100)\qquad ds^2 = \frac{H}{4}(u-v)\left[\frac{du^2}{u^2\Delta\left(\frac{1}{u}\right)} - \frac{dv^2}{v^2\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}\right],$$

où l'on a désigné, pour abréger, par $\Delta(S)$ le déterminant suivant

$$(101)\qquad \Delta(S) = \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix}.$$

Appliquons d'abord ce résultat au paraboloïde défini par l'équation (92)

$$2y^2 + 2iyz + 2kx = 0.$$

On aura ici

$$H = -k^2, \qquad \Delta(S) = -S(S-1)^2,$$

et il viendra

$$(102)\qquad ds^2 = \frac{k^2}{4}(u-v)\left[\frac{u\,du^2}{(u-1)^2} - \frac{v\,dv^2}{(v-1)^2}\right].$$

Pour le second paraboloïde, ayant pour équation

$$2xy + 2ixz - 2ky + 2ikz = 0,$$

on trouvera

$$H = -4k^2, \qquad \Delta(S) = -S^3;$$

de sorte qu'il viendra

$$(103)\qquad ds^2 = k^2(u-v)(u\,du^2 - v\,dv^2).$$

Ces résultats sont conformes à ceux qui ont été indiqués par M. Weingarten.

**1081.** Bien que les paraboloïdes considérés dans les numéros précédents soient imaginaires, il nous a paru utile de les introduire pour préciser le degré de généralité des résultats nouveaux qui ont été obtenus dans la théorie de la déformation et pour bien montrer combien on est encore éloigné d'une solution quelque peu étendue du problème. Si l'on se place à ce point de vue, il ne sera pas inutile d'indiquer quelques surfaces réglées, aussi simples que possible, admettant les éléments linéaires, indiqués par M. Baroni et M. Goursat, pour lesquels la solution du problème de la déformation peut être obtenue d'une manière complète.

A cet effet, nous remarquerons que si, dans les formules générales (91), on remplace la fonction arbitraire $\alpha$ par $2v$, on obtient une surface réglée admettant l'élément linéaire (63) et définie par l'équation

$$(104) \qquad y - iz = 2x(y+iz) + \frac{2}{3}(y+iz)^3 + 2\psi(y+iz).$$

Si donc on pose

$$\psi'(v) = m(1-m)\frac{v^2}{2} + \mathrm{A}v,$$

la surface correspondante aura pour équation

$$(105) \qquad y - iz = 2x(y+iz) + \frac{2+m-m^2}{3}(y+iz)^3 + \mathrm{A}(y+iz)^2.$$

En laissant de côté le cas où $m$ est égal à 2, on voit que, pour les cas signalés par MM. Baroni et Goursat, l'élément linéaire convient à une surface réglée du troisième degré à plan directeur isotrope.

---

# CHAPITRE XIV.

## DERNIÈRES RECHERCHES.

Nouveau développement donné par M. Weingarten aux recherches précédentes. — Problème proposé. — Étant donné un élément linéaire, pour résoudre le problème de la déformation, on mène par chaque point de la surface cherchée (Θ) une tangente faisant un angle déterminé, mais d'ailleurs variable, avec les courbes coordonnées; puis on prend comme variables indépendantes deux paramètres quelconques propres à définir la direction de cette droite dans l'espace. — Formation des équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les coordonnées curvilignes $u$ et $v$ considérées comme fonctions de ces paramètres. — A ce propos, l'on rappelle et l'on complète quelques propriétés de la ligne de striction des surfaces réglées. — Étant donnée une congruence rectiligne, assembler les droites en surfaces réglées dont les lignes de striction soient sur une des nappes focales de la congruence. — Les propriétés géométriques établies permettent de simplifier les équations qui déterminent $u$ et $v$ et de les réduire à une seule équation aux dérivées partielles du second ordre. — Renvoi au Mémoire de M. Weingarten couronné par l'Académie des Sciences.

---

**1082.** Si l'on analyse la méthode suivie par M. Weingarten et exposée dans le Chapitre précédent, on remarquera qu'elle peut être interprétée comme il suit. Par chaque point de la surface (Θ) admettant l'élément linéaire donné par la formule (4) [p. 309] on mène une tangente $(d)$ dont les cosinus directeurs C, C′, C″ s'expriment par les formules (13) [p. 312]. On exprime ces cosinus directeurs en fonction de deux paramètres $u'$ et $v'$ et l'on essaye de déterminer les coordonnées curvilignes $u$ et $v$ en fonction de ces paramètres. Dans le cas particulier le plus important, celui où l'élément linéaire de (Θ) revêt la forme (48), l'une des coordonnées $v$ est déterminée par une équation aux dérivées partielles du second ordre, l'équation (57) [p. 324]. L'autre $u$ s'exprime rationnellement en fonction de $v$, supposée connue, et de ses dérivées premières par rapport aux variables $\alpha$ et $\beta$, en fonction desquelles les cosinus C, C′, C″ ont été exprimés par les formules (52).

Pour rechercher si des simplifications analogues se produisent toujours, proposons-nous donc le problème général suivant :

Étant donné un élément linéaire quelconque, défini par la formule

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

supposons qu'il s'agisse de déterminer toutes les surfaces $(\Theta)$ admettant cet élément linéaire. Si l'on mène, par chaque point d'une de ces surfaces, une tangente $(d)$ déterminée exclusivement au moyen de l'élément linéaire, c'est-à-dire une tangente faisant avec l'une des courbes coordonnées un angle qui sera une fonction déterminée de $u$ et de $v$, la direction des droites telles que $(d)$ dépendra de deux paramètres que l'on pourra choisir d'une infinité de manières différentes. Par exemple, on mènera par le centre d'une sphère (S) de rayon 1 des parallèles aux droites $(d)$. Si l'on prend sur la sphère (S) un système de coordonnées curvilignes quelconques $u'$, $v'$, la direction de chaque droite $(d)$ sera définie par les coordonnées curvilignes du point où la parallèle à cette droite rencontre la sphère (S). Proposons-nous, avec M. Weingarten, de déterminer les coordonnées curvilignes $u$ et $v$ du point de la surface $(\Theta)$ en fonction des variables indépendantes $u'$ et $v'$.

Employons ici encore le trièdre (T). Il est clair qu'on peut le déterminer par la condition que son axe des $x$ coïncide avec la droite $(d)$. D'après les notations que nous avons adoptées, $a$, $a'$, $a''$ sont les cosinus directeurs de cette droite et l'on doit avoir

$$ds'^2 = da^2 + da'^2 + da''^2 = e\,du'^2 + 2f\,du'\,dv' + g\,dv'^2, \tag{2}$$

$e$, $f$, $g$ étant des fonctions connues de $u'$ et de $v'$. L'équation précédente donne l'élément linéaire de la sphère (S), exprimé en fonction des variables $u'$ et $v'$. Si l'on emploie les formules

$$\left\{\begin{aligned} da &= b(r\,du + r_1\,dv) - c(q\,du + q_1\,dv),\\ da' &= b'(r\,du + r_1\,dv) - c'(q\,du + q_1\,dv),\\ da'' &= b''(r\,du + r_1\,dv) - c''(q\,du + q_1\,dv),\end{aligned}\right. \tag{3}$$

on peut lui donner la forme suivante

$$(q\,du + q_1\,dv)^2 + (r\,du + r_1\,dv)^2 = e\,du'^2 + 2f\,du'\,dv' + g\,dv'^2, \tag{4}$$

qui, jointe aux six équations fondamentales (A) [II, p. 382] entre

les rotations et les translations, permettra d'éliminer les rotations et conduira aux équations aux dérivées partielles propres à déterminer $u$ et $v$ en fonction de $u'$ et de $v'$. Le premier point à établir est le suivant : parmi les équations du système (A), l'une d'elles, la première, peut être laissée de côté et sera toujours, dans le cas actuel, une conséquence des cinq autres.

Si, en effet, l'on mène, par le point $m$ de (S) qui sert de représentation sphérique à la droite $(d)$ tangente en M à ($\Theta$), un trièdre ($T_1$) ayant ses axes parallèles à ceux de (T), ce trièdre aura son axe des $x$ normal en $m$ à la sphère (S); et, comme il a les mêmes rotations que le trièdre (T), il suffit de faire une permutation circulaire pour reconnaître que la première équation (A) exprime le fait suivant : la courbure totale de (S) est égale à l'unité. Comme la formule (2) nous donne l'élément linéaire de cette sphère, il n'est donc pas douteux que la première équation (A) sera une conséquence de toutes les autres et que nous pourrons la négliger.

**1083.** Cela posé, revenons à l'équation (4). Si nous y remplaçons $du$, $dv$ par leurs expressions

$$du = \frac{\partial u}{\partial u'} du' + \frac{\partial u}{\partial v'} dv', \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial u'} du' + \frac{\partial v}{\partial v'} dv',$$

et si nous égalons les coefficients de $du'^2$, $du'\,dv'$, $dv'^2$ dans les deux membres, elle se décomposera en trois équations. *Comme $r$ et $r_1$ sont des fonctions connues de $u$ et de $v$*, ces trois équations, non seulement nous fourniront les valeurs de $q$ et de $q_1$, mais elles nous donneront de plus une relation entre $u'$, $v'$, les fonctions $u$, $v$ et leurs dérivées premières par rapport à $u'$ et à $v'$. Voici comment on peut obtenir cette relation.

Donnons à l'équation (4) la forme suivante :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &(q\,du + q_1\,dv)^2 = e\,du'^2 + 2f\,du'\,dv' + g\,dv'^2 \\ &\qquad - \left[\left(r\frac{\partial u}{\partial u'} + r_1\frac{\partial v}{\partial u'}\right)du' + \left(r\frac{\partial u}{\partial v'} + r_1\frac{\partial v}{\partial v'}\right)dv'\right]^2. \end{aligned} \right.$$

En écrivant que le second membre est un carré parfait, nous aurons la relation

$$(6) \qquad r^2\,\Delta u + 2rr_1\,\Delta(u, v) + r_1^2\,\Delta(v) = 1,$$

le symbole $\Delta\theta$ étant le paramètre différentiel du premier ordre

$$(7)\qquad \Delta\theta = \frac{e\left(\frac{\partial\theta}{\partial v'}\right)^2 - 2f\frac{\partial\theta}{\partial u'}\frac{\partial\theta}{\partial v'} + g\left(\frac{\partial\theta}{\partial u'}\right)^2}{eg - f^2},$$

*relatif à l'élément linéaire de la sphère* (S).

Quand la relation (6) sera vérifiée, le second membre de l'équation (5) sera un carré parfait

$$(Q\,du' + Q_1\,dv')^2,$$

où Q et $Q_1$ seront des fonctions connues de $u'$, $v'$, de $u$, $v$ et de leurs dérivées premières. Les rotations $q$ et $q_1$ seront déterminées par l'identité

$$q\,du + q_1\,dv = Q\,du' + Q_1\,dv',$$

qui donnera

$$(8)\qquad \begin{cases} q\dfrac{\partial u}{\partial u'} + q_1\dfrac{\partial v}{\partial u'} = Q, \\ q\dfrac{\partial u}{\partial v'} + q_1\dfrac{\partial v}{\partial v'} = Q_1. \end{cases}$$

On déduit de là les valeurs de $q$ et de $q_1$. Ces valeurs donnent lieu à l'identité suivante

$$(9)\qquad \frac{\partial Q}{\partial v'} - \frac{\partial Q_1}{\partial u'} = \left(\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial u'}\right),$$

dont la vérification n'offre aucune difficulté.

Les valeurs de $q$ et de $q_1$ une fois obtenues, il n'y a plus qu'à les porter dans les équations (A), qui se réduisent aux suivantes, si l'on tient compte de la remarque faite plus haut,

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 - pr_1, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r\eta_1, \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - qp_1, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = r\xi_1 - \xi r_1, \\ & p\eta_1 - \eta p_1 = q\xi_1 - \xi q_1. \end{cases}$$

Les deux premières de droite servent de définition à $r$ et à $r_1$; les trois autres contiennent les deux rotations $p$, $p_1$ que l'on peut

éliminer; et il reste l'unique équation

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} & r_1 & -r \\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} & -q_1 & q \\ q\xi_1 - \xi q_1 & -\eta_1 & \eta \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace $q$, $q_1$, $\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u}$ par leurs valeurs déduites des équations (8) et (9) on sera conduit à une nouvelle relation entre $u$, $v$ et leurs dérivées par rapport à $u'$ et à $v'$. Cette équation, jointe à celle (6) que nous avons obtenue, donnera toutes les relations nécessaires entre les variables $u$, $v$, $u'$, $v'$. Mais elle sera cette fois du second ordre par rapport aux dérivées de $u$ et de $v$.

**1084.** D'ailleurs, lorsqu'on aura les expressions de $u$, $v$ en fonction de $u'$, $v'$, la surface ($\Theta$) s'obtiendra par de simples quadratures, pourvu que le système de coordonnées $u'$, $v'$ soit choisi, sur la sphère (S), de telle manière que l'on connaisse les expressions de $a$, $a'$, $a''$ en fonction de $u'$ et $v'$. Dans cette hypothèse, en effet, les formules (3) nous feront connaître $b$, $b'$, $b''$, en fonction des dérivées premières de $a$, $a'$, $a''$, et la surface ($\Theta$) sera définie par les formules

$$(12) \qquad \begin{cases} X = \int a(\xi\, du + \xi_1\, dv) + b(\eta\, du + \eta_1\, dv), \\ Y = \int a'(\xi\, du + \xi_1\, dv) + b'(\eta\, du + \eta_1\, dv), \\ Z = \int a''(\xi\, du + \xi_1\, dv) + b''(\eta\, du + \eta_1\, dv). \end{cases}$$

Les deux équations qui déterminent $u$ et $v$ en fonction de $u'$ et de $v'$ sont, en général, assez compliquées. On les ramène à la forme la plus simple qu'elles puissent recevoir à l'aide de l'artifice suivant.

**1085.** Supposons d'abord que les droites ($d$) aient été données *a priori*, c'est-à-dire que l'on ait indiqué d'une manière précise comment le trièdre (T) est rattaché à la surface ($\Theta$). Cherchons sur cette surface les courbes (K) définies par l'équation différen-

tielle

$$(13) \qquad r\,du + r_1\,dv = 0,$$

c'est-à-dire les courbes telles que, lorsqu'on se déplace suivant l'une d'elles, la composante de la rotation du trièdre autour de la normale soit nulle. On peut interpréter géométriquement cette condition.

En effet, les formules (3), qui donnent les différentielles de $a$, $a'$, $a''$, nous montrent que, si l'équation (13) est vérifiée, la surface réglée engendrée par l'axe des $x$ du trièdre (T) a son plan tangent à l'infini perpendiculaire à l'axe des $y$ de ce trièdre, c'est-à-dire normal au plan tangent de ($\Theta$). Donc les courbes définies par l'équation différentielle (13) sont les lignes *de striction* des surfaces réglées engendrées par l'axe des $x$ du trièdre (T), et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

*Étant donnée une congruence formée de droites* ($d$) *tangentes à une surface* ($\Theta$), *si l'on veut assembler ces droites en surfaces réglées dont les lignes de striction soient sur la surface* ($\Theta$), *il faudra intégrer une équation différentielle du premier ordre, qui fera connaître ces lignes de striction. Cette équation ne changera pas de forme quand la surface* ($\Theta$) *se déformera en entraînant les droites de la congruence.*

Il résulte de la méthode suivie que ces lignes de striction subsisteront si, à chaque droite ($d$) de la congruence, on substitue, dans le même plan tangent de ($\Theta$), une autre droite ($d'$) faisant avec ($d$) un angle qui demeure constant sur chaque ligne de striction, car alors les trièdres relatifs aux droites ($d$) et ($d'$) auront les mêmes rotations.

Au lieu de donner la congruence formée par les droites ($d$), supposons que l'on donne les lignes de striction (K). Nous allons voir que, pour déterminer la congruence, il ne sera pas nécessaire cette fois d'intégrer une équation différentielle : il suffira d'effectuer une quadrature.

Employons, en effet, un trièdre (T) rattaché à ($\Theta$) d'une manière arbitraire, mais connue; et déterminons la droite ($d$) de la congruence qui passe en un point M de ($\Theta$) par l'angle $\alpha$ qu'elle fait avec l'axe des $x$ du trièdre. Lorsqu'on se déplace sur une des

lignes (K) données, la droite $(d)$ engendre une surface réglée. Déterminons le plan tangent à l'infini de cette surface. Pour cela, menons par un point fixe O une droite $Om$ de longueur 1, parallèle à $(d)$; et rapportons cette droite à un trièdre (T′), de sommet O, parallèle au trièdre (T). Le point $m$ ayant pour coordonnées relatives à ce trièdre

$$\cos\alpha, \quad \sin\alpha, \quad 0,$$

les projections de son déplacement seront

$$\begin{gathered} -\sin\alpha(d\alpha + r\,du + r_1\,dv), \\ \cos\alpha(d\alpha + r\,du + r_1\,dv), \\ (p\,du + p_1\,dv)\sin\alpha - (q\,du + q_1\,dv)\cos\alpha. \end{gathered}$$

Pour que la courbe (K) décrite par le point M de $(\Theta)$ soit ligne de striction de la surface réglée engendrée par la droite $(d)$, il faut que le déplacement précédent soit normal au plan des $xy$, c'est-à-dire que l'on ait

$$(14) \qquad d\alpha + r\,du + r_1\,dv = 0.$$

Cette équation met immédiatement en évidence le résultat énoncé. On aura

$$(15) \qquad \alpha = -\int r\,du + r_1\,dv,$$

l'intégrale étant prise suivant l'une quelconque des courbes (K). La constante qu'il faudra lui ajouter pourra varier quand on passera de l'une de ces courbes à une autre. Si, par exemple, on a choisi le système de coordonnées curvilignes de telle manière que les courbes (K) soient définies par l'équation

$$u = \text{const.},$$

on aura

$$\alpha = -\int_{v_0}^{v} r_1\,dv + \varphi(u).$$

$\varphi(u)$ étant une fonction arbitraire de $u$.

**1086.** Les remarques précédentes établissent implicitement certaines propriétés intéressantes de la ligne de striction d'une surface réglée. On savait déjà que cette ligne conserve sa définition quand

la surface se déforme de telle manière que ses génératrices demeurent rectilignes. Nous voyons maintenant que, si l'on inscrit suivant la ligne de striction une surface quelconque ($\Theta$) tangente à la surface réglée, on pourra déformer cette surface de telle manière qu'elle entraîne dans ses plans tangents les génératrices de la surface réglée sans que la ligne de contact cesse d'être la ligne de striction. Cette nouvelle proposition comprend la précédente, car la surface ($\Theta$) peut se réduire à la surface réglée elle-même; il serait d'ailleurs aisé de la démontrer par une voie entièrement géométrique. Elle conduit à la conséquence suivante :

Soit (K) une courbe quelconque tracée sur ($\Theta$); proposons-nous de déterminer les surfaces réglées, tangentes à ($\Theta$), dont elle est la ligne de striction. Nous substituerons à la surface ($\Theta$) la développable ($\Delta$) circonscrite à ($\Theta$) suivant la courbe (K), et nous effectuerons le développement de ($\Delta$) sur un plan. La courbe (K) se transformera ainsi en une courbe plane (K′). Les génératrices ($d$) de la surface réglée deviendront des droites ($d'$), situées dans le plan de (K′) et passant par ses différents points. Pour que la courbe (K′) puisse être regardée comme une ligne de striction pour la surface réglée engendrée par ces droites ($d'$), *il faudra qu'elles soient toutes parallèles*. Car, si elles se coupaient à distance finie, le plan tangent à l'infini de la surface réglée coïnciderait avec le plan de (K′); tandis que, dans le cas où les droites sont toutes parallèles, ce plan tangent est indéterminé et peut être considéré comme perpendiculaire au plan de (K′). Nous sommes donc conduits à la construction suivante :

*Étant donnée une courbe* (K) *située sur une surface* ($\Theta$), *pour obtenir les surfaces réglées, tangentes à* ($\Theta$) *suivant cette courbe, dont elle est la ligne de striction, on circonscrira une développable à la surface* ($\Theta$) *suivant la courbe* (K); *puis on déformera cette développable de telle manière que, ses génératrices demeurant rectilignes, elle vienne s'appliquer sur un plan. La courbe* (K) *sera ainsi transformée en une courbe* (K′). *Si, par les différents points de cette courbe plane, on mène des parallèles* ($d'$) *à une direction quelconque, ces parallèles seront les transformées des génératrices rectilignes* ($d$) *de la surface cherchée.*

Au lieu d'employer la Géométrie, on peut aussi, pour retrouver ces résultats, remarquer que, si l'on introduit le rayon de courbure géodésique $\rho_g$ de (K), l'équation fondamentale (14) peut s'écrire

$$d(\alpha - \omega) = -\frac{ds}{\rho_g},$$

les notations du Livre V, Chap. IV, étant conservées. $\alpha - \omega$ est l'angle que fait la droite cherchée avec la courbe (K); si nous le désignons par I, on a

$$dI = -\frac{ds}{\rho_g}, \tag{16}$$

de sorte que la théorie actuelle nous donne une interprétation géométrique élégante de l'angle de contingence géodésique. En particulier, les propositions démontrées au n° 737 et dues à M. Bonnet sont ramenées à leur véritable origine; la formule (44) de ce numéro est d'ailleurs identique, aux notations près, à celle que nous venons d'indiquer.

**1087.** Revenons maintenant à la question que nous avons à traiter, et supposons que l'on ait pris sur la surface ($\Theta$) une famille quelconque de courbes (K). Associons-leur une seconde famille de courbes (L), qui détermineront avec les premières un système de coordonnées curvilignes $u$ et $v$, le paramètre $u$ étant celui qui convient aux courbes (K). Je dis d'abord que l'on peut toujours déterminer les courbes (L) de telle manière que, si l'on fait correspondre au point de ($\Theta$) un point d'un plan (P) de coordonnées rectilignes $u$ et $v$, la courbure d'une portion quelconque de ($\Theta$) soit égale à l'aire de la portion correspondante du plan (P).

Comme la courbure est représentée (n$^{os}$ 496 à 499) par l'intégrale double

$$\iint \left(\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}\right) du\, dv,$$

il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = 1. \tag{17}$$

Or, si l'on a choisi arbitrairement les courbes (L), on aura

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = f(u, v).$$

Changeons les courbes de paramètre $v$; c'est-à-dire posons

$$v^0 = \varphi(u, v);$$

$r^0$, $r_1^0$ désignant les nouvelles rotations, on devra avoir

$$r^0\, du + r_1^0\, dv^0 = r\, du + r_1\, dv,$$

ce qui donnera

$$r = r^0 + r_1^0 \frac{\partial v^0}{\partial u}, \qquad r_1 = r_1^0 \frac{\partial v^0}{\partial v},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = \left(\frac{\partial r^0}{\partial v^0} - \frac{\partial r_1^0}{\partial u}\right) \frac{\partial v^0}{\partial v} = f(u, v).$$

On doit avoir, avec le nouveau système de coordonnées $u$, $v^0$,

$$\frac{\partial r^0}{\partial v^0} - \frac{\partial r_1^0}{\partial u} = 1.$$

Donc l'équation précédente nous donnera

$$\frac{\partial v^0}{\partial v} = f(u, v),$$

ou

$$(18) \qquad v^0 = \int_{v_1}^{v} f(u, v)\, dv + \psi(u);$$

$v_1$ désignant une constante; de sorte que, par une simple quadrature, la question proposée sera résolue.

Ainsi, en laissant entièrement arbitraires les courbes de paramètre $u$, on peut toujours réaliser la condition

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = 1.$$

Il existera alors donc une fonction $\alpha$, déterminée à une constante près et satisfaisant aux deux équations

$$(19) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial u} + r = v, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} + r_1 = 0.$$

Or, si l'on substitue au trièdre (T) choisi primitivement un autre trièdre dont l'axe des $x$ fasse avec le premier l'angle $\alpha$ défini par les deux relations précédentes, les premiers membres de ces relations seront les rotations nouvelles de ce trièdre autour de l'axe des $z$. *On peut donc, par de simples quadratures, et en laissant entièrement arbitraires les courbes de paramètre $u$, réaliser les deux conditions*

$$r = v, \qquad r_1 = 0. \tag{20}$$

Alors *les lignes de paramètre $u$ seront lignes de striction pour les surfaces réglées qui sont engendrées par l'axe des $x$ (ou par l'axe des $y$) du trièdre* (T) *lorsque le sommet du trièdre se déplace suivant une de ces courbes.*

**1088.** Avec ce système de coordonnées, la première des deux équations (6) et (11), qui déterminent $u$ et $v$ en fonction de $u'$ et de $v'$, se ramène à la forme simple

$$v^2 = \frac{1}{\Delta u}, \tag{21}$$

de sorte qu'elle permet d'exprimer $v$ en fonction de $u$. La valeur de $v$, portée dans l'équation (11), donnera une équation, nécessaire et suffisante, qui déterminera $u$. Il est facile de reconnaître que cette équation est du second ordre et de la former, en employant les paramètres différentiels pour abréger les calculs.

Reprenons à cet effet l'élément linéaire de la sphère (S), défini par l'équation

$$ds'^2 = e\,du'^2 + 2f\,du'\,dv' + g\,dv'^2,$$

et formons les paramètres différentiels de $u$, *relatifs à cet élément*. Par suite des propriétés d'invariance de ces paramètres, on pourra écrire l'élément linéaire avec les variables $u$ et $v$, ce qui donnera, en tenant compte des relations (4) et (20),

$$ds'^2 = v^2\,du^2 + (q\,du + q_1\,dv)^2, \tag{22}$$

puis former les paramètres différentiels avec ces variables $u$ et $v$.

On aura, $\theta$, $\sigma$ désignant des fonctions quelconques,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{1}{q_1^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{v^2 q_1^2}\left(q\frac{\partial\theta}{\partial v} - q_1\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2,\\ \Delta(\theta,\sigma) &= \frac{1}{q_1^2}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \frac{1}{v^2 q_1^2}\left(q\frac{\partial\theta}{\partial v} - q_1\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\left(q\frac{\partial\sigma}{\partial v} - q_1\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right),\\ \Delta_2\theta &= \frac{1}{vq_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{q_1}{v}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{q}{v}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) + \frac{1}{vq_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v^2+q^2}{vq_1}\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{q}{v}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right). \end{aligned}\right.$$

Et l'on déduit de là immédiatement l'équation (21) donnée plus haut. Appliquant aussi la seconde formule aux deux fonctions $a$ et $u$, on trouvera

$$\Delta(a,u) = -\frac{1}{v^2 q_1}\left(q\frac{\partial a}{\partial v} - q_1\frac{\partial a}{\partial u}\right),$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial a}{\partial u}$, $\frac{\partial a}{\partial v}$ par leurs expressions connues, déduites des formules (3),

$$\frac{\partial a}{\partial u} = br - cq, \qquad \frac{\partial a}{\partial v} = br_1 - cq_1,$$

et tenant compte des équations (20)

$$(24)\qquad b = v\,\Delta(a,u).$$

Ainsi, quand $u$ sera connue, les coordonnées du point de la surface cherchée $(\Theta)$ seront définies par les quadratures

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \int a\,(\xi\,du + \xi_1\,dv) + v\,\Delta(a,u)(\eta\,du + \eta_1\,dv),\\ Y &= \int a'(\xi\,du + \xi_1\,dv) + v\,\Delta(a',u)(\eta\,du + \eta_1\,dv),\\ Z &= \int a''(\xi\,du + \xi_1\,dv) + v\,\Delta(a'',u)(\eta\,du + \eta_1\,dv). \end{aligned}\right.$$

Tout est donc ramené à la détermination de $u$. Or on a

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{v^2}, & \Delta\Delta u &= \frac{4(v^2+q^2)}{v^8 q_1^2},\\ \Delta(u,\Delta u) &= \frac{2q}{v^5 q_1}, & \Delta_2 u &= -\frac{p_1}{vq_1} + \frac{q}{v^3 q_1}, \end{aligned}\right.$$

et enfin

$$(27)\qquad \sigma(u) = \frac{p}{v^4 q_1},$$

$\sigma(u)$ étant l'invariant défini au n° 707 et exprimé en fonction des précédents par la formule

$$(28)\qquad \sigma u = \frac{\Delta\,\Delta u - 2\,\Delta(u, \Delta u)\,\Delta_2 u}{4\,\Delta u}.$$

Il n'y a plus qu'à adjoindre la dernière des relations (10), écrite sous la forme

$$\frac{p}{q_1}\eta_1 - \eta\frac{p_1}{q_1} = \frac{q}{q_1}\xi_1 - \xi,$$

et à remplacer, dans cette nouvelle équation, les rapports $\frac{p}{q_1}$, $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{q}{q_1}$ par leurs valeurs, que l'on déduira des équations (26) et (27), pour obtenir l'équation finale

$$(29)\qquad \eta_1\,\sigma(u) + \frac{\eta}{v^3}\Delta_2 u + \frac{\xi}{v^4} - \frac{\eta + \xi_1 v^2}{2v}\Delta(u, \Delta u) = 0,$$

à laquelle devra satisfaire $u$. Il faudra y remplacer partout, et en particulier dans les expressions des translations $\xi$, $\eta$, $\xi_1$, $\eta_1$, la variable $v$ par sa valeur $\frac{1}{\sqrt{\Delta u}}$. Ces translations satisfont à deux des équations (10) qui deviennent ici

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial v} - \dfrac{\partial\xi_1}{\partial u} = -v\eta_1, \\[2mm] \dfrac{\partial\eta}{\partial v} - \dfrac{\partial\eta_1}{\partial u} = \quad v\xi_1. \end{cases}$$

**1089.** Pour faire des applications de sa méthode, M. Weingarten a choisi sur la sphère (S) le système de coordonnées symétriques pour lequel on a

$$(31)\qquad a = \frac{x+y}{1+xy},\qquad a' = \frac{i(y-x)}{1+xy},\qquad a'' = \frac{xy-1}{1+xy},$$

l'élément linéaire ayant pour expression

$$(32)\qquad ds'^2 = \frac{4\,dx\,dy}{(1+xy)^2}.$$

On a ici, en adoptant les notations de Monge pour les dé-

rivées,

$$(33)\quad \begin{cases} \Delta u = (1+xy)^2 pq, & \Delta\Delta u = (1+xy)^6(qr_1+ps)(pt_1+q \\ \Delta_2 u = (1+xy)^2 s, & \Delta(u,\Delta u) = \dfrac{(1+xy)^4}{2}(2pqs+p^2t_1+q \\ \sigma(u) = \dfrac{(1+xy)^4}{4}(r_1t_1-s^2), \end{cases}$$

$r_1$ et $t_1$ désignant, pour abréger, les combinaisons suivantes

$$(34)\qquad r_1 = r + \frac{2py}{1+xy}, \qquad t_1 = t + \frac{2qx}{1+xy}.$$

La substitution de ces valeurs conduit à une équation de la forme

$$(r-A)(t-C)-(s-B)(s-B_1)=0,$$

où A, C, B, $B_1$ sont des fonctions de $x$, $y$, $u$, $p$, $q$. M. Weingarten, après avoir formé cette équation, a cherché dans quel cas elle peut être complètement intégrée par la méthode de Monge, ce qui l'a conduit aux surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution. Mais son Mémoire, couronné par l'Académie des Sciences [1], n'étant pas encore publié, nous nous contenterons des indications précédentes. Nous ferons seulement remarquer que si, pour simplifier autant que possible l'équation, on fait les deux hypothèses

$$\eta_1 = 0, \qquad \eta + \xi_1\rho^2 = 0,$$

on retrouve les propositions établies dans le Chapitre précédent.

Le résultat des recherches contenues dans ce Chapitre peut s'énoncer comme il suit :

*Étant donnée une famille quelconque de courbes* (K) *tracées sur une surface* (Θ), *on peut toujours, par de simples quadratures, déterminer toutes les congruences* (G) *formées de tangentes à* (Θ) *et telles que les surfaces réglées engendrées par toutes les droites de la congruence ayant leur origine sur une des courbes* (K) *admettent cette courbe comme*

---

(1) *Voir* les *Comptes rendus*, t. CXIX, p. 1050, 1051, décembre 1894. Pour la partie analytique et pour le fond, notre exposition coïncide avec celle de M. Weingarten; les propriétés géométriques sont nouvelles.

*ligne de striction. La relation entre la congruence et la surface subsiste quand la surface se déforme en entraînant les droites. Si l'on prend deux variables indépendantes pour définir la direction de chaque droite de la congruence, le paramètre de la famille de courbes* (K) *doit satisfaire à une équation aux dérivées partielles du second ordre qui dépendra exclusivement de l'élément linéaire de* (Θ) *et dont l'intégration permet, par suite, de déterminer par de simples quadratures toutes les surfaces applicables sur la surface* (Θ).

---